Математика IV

за четврти разред гимназије

Растко Вуковић, проф.

скрипта за наставу држану 2011-14. ш. г. у Бањој Луци

Гимназија Бања Лука, 2011.

Растко Вуковић: Математика IV

Гимназија Бања Лука, 2011.

Математика за IV разред гимназије

Скрипта за наставу математике у гимназијама РС БиХ од 2011. године.

Садржај

1. Реалне функције 5
   1.1. Опште особине 5
   1.2. Алгебарске функције 8
   1.3 Трансцедентне функције 14
   1.4 Посебне функције 19
2. Лимеси 22
   2.1. Лимес функције 23
   2.2. Особине лимеса 26
   2.3. Посебни лимеси 31
   2.4. Лимес (sin x)/x 34
   2.5. Број *e* 36
   2.6. Асимптоте 39
3. Изводи 41
   3.1. Извод функције 41
   3.2. Таблица извода 48
   3.3. Ток функције 53
   3.4. Диференцијал 58
   3.5*. Средња вриједност 61
   3.6*. Лопиталово правило 68
   3.7*. Кинематика тачке 71
4. Интеграл 76
   4.1. Неодређени интеграл 76
   4.2*. Диференцијалне једначине 83
   4.3. Одређени интеграл 88
   4.4*. Теореме диференцијалног рачуна 95
   4.5*. Друге координате 98
   4.6*. Примјене у физици 101
5. Комбинаторика 114

5.1. Варијације 115
5.2. Пермутације 118
5.3. Комбинације 122
5.4. Биномни коефицијенти 124
6. Вјероватноћа 131
6.1. Случајни догађај 131
6.2. Вјероватноћа 135
6.3. Условне вјероватноће 140
7. Расподјеле 149
7.1 Случајне промјенљиве 149
7.2 Биномна расподјела 157
7.3. Математичко очекивање 167
7.4 Дисперзија 173
8. Статистика 182
8.1. Узорак 182
8.2. Дистрибуција 187
8.3. Регресија 194
8.4. Тестирање 202

1. Реалне функције

Грубо речено, у математици имамо двије врсте величина, оне чије су вриједности увијек исте и оне чије се вриједности мјењају. Прве називамо **константама**, друге **промјенљивима**.

Посебно су нам је занимљиви случајеви када су те вриједности реални бројеви, а са друге стране, када једна или више промјенљивих величина има тачно одређену вриједност чиме одређује вриједност осталих промјенљивих. На примјер, ако су x и y дужине страница правоугаоника, онда је површина правоугаоника $z = x \cdot y$.

1.1. Опште особине

Релација је било какво придруживање елемената једног скупа другом. Из првог разреда знамо да релацију можемо дефинисати и као скуп уређених парова. На примјер, релација

$$S = \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,4), (5,6)\}$$

има придруживања S : $1 \to 2$, $1 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 4$ и $5 \to 6$. Скупови првих и других елемената су

$$A = \{ 1, 2, 3, 5\}, \qquad B = \{2, 3, 4, 5\}.$$

Први скуп зовемо **домен**, други је **кодомен** релације S. Посебан случај релације је функција.

Функција (f) је придруживање елемената једног скупа ($\boldsymbol{D}$) другом скупу ($\boldsymbol{K}$), тако да се једном елементу $x \in \boldsymbol{D}$ придружује тачно један елеменат $y \in \boldsymbol{K}$. Тада пишемо

$$f : x \to y, \qquad \text{или} \qquad y = f(x).$$

Скуп првих елемената ($\boldsymbol{D}$) назива се подручје дефиниције, или **домен** функције, а скуп других елемената ($\boldsymbol{K}$) је подручје вриједности, ранг, или **кодомен** функције. Када домен и кодомен садрже само реалне бројеве, тада функцују називамо **реална** функција.

Примјер 1.1.1. Придруживање реалних бројева дефинисано са $f : x \to y$, такво да је $x = y^2$, није функција, али јесте релација. Наиме, из $9 \to \pm 3$ слиједи да за један елеменат домена, рецимо број 9, постоје два елемента кодомена , бројеви ± 3, који су са њим у релацији. ♦

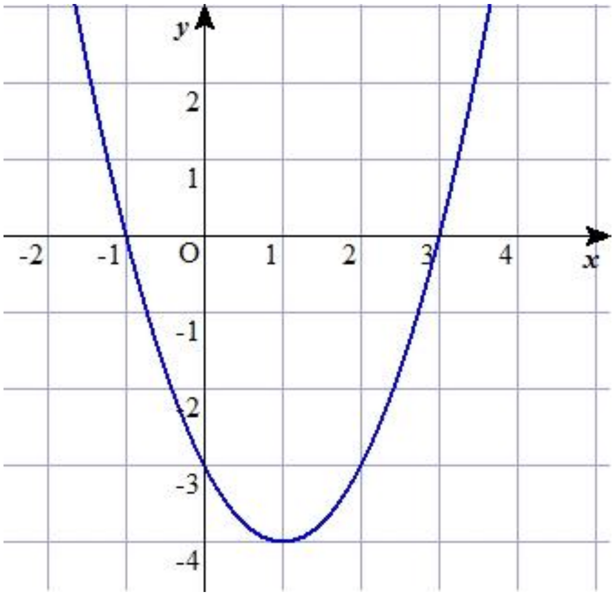
Примјер 1.1.2. Придруживање реалних бројева дефинисано са $f : x \to y$, такво да је $x^2 = y$, јесте функција, а наравно јесте и релација. Наиме, из $\pm 3 \to 9$ и слично, слиједи да један елеменат домена може бити придружен највише једном елементу кодомена. ♦

Инверзна функција f^{-1}, попут инверзне релације, је пресликавање уназад истим стрелицама функције f, из елемената кодомена у одговарајуће елементе домена.

Подсјетимо се, када имамо два скупа елемената A и B, тада има смисла говорити о релацији у случајевима да нису сви елементи скупа B у тој релацији, тада кажемо да релација није „на“ пресликавање, односно да није **сурјекција**. У другом случају, могуће је да су исти елементи скупа

А у вишеструким релацијама са неким елементима скупа *B*, па кажемо да то није „1-1“ релација, односно да релација није **инјекција**.

Када кодомен *B* сузимо (редукујемо) на само оне елементе који јесу у релацијама и посматрамо само релације које су функције, онда преостају двије могућности. Функција јесте или није инјекција. Дакле, ако је редукована функција инјекција, она је обострано једнозначно пресликавање, тј. **бијекција**.



На слици лијево је парабола (плаво)

$$y = x^2 - 2x - 3$$

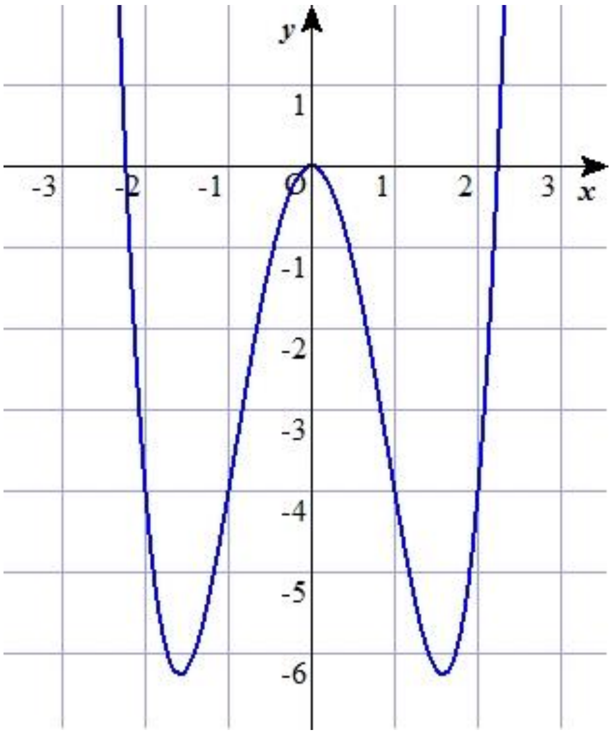
у Декартовом правоуглом систему координата. То је пресликавање f : x $\to$ y које разумјемо графички. Узмемо прозвољну тачку параболе и погледамо које су њене нормалне пројекције на осе координатног система. Вриједност апсцисе (рецимо $x = 2$) и ординате (тада $y = -3$) су елементи домена и кодомена у пресликавању. Апсциса и ордината уврштени, замјењени у датој формули параболе даће једнакост. Кажемо да задовољавају дату функцију.
Примјетимо да ће ову параболу задовољавати и пар бројева $x = 0$, $y = -3$. Према томе, ова функција није бијекција. Међутим, ако обришемо дио графа лијево од апсцисе $x = 1$, и редукујемо кодомен на онај дио *y*-осе на који се (нормално) пројектују преостале тачке параболе (чије су апсцисе $x > 1$), тада добијамо бијекцију.

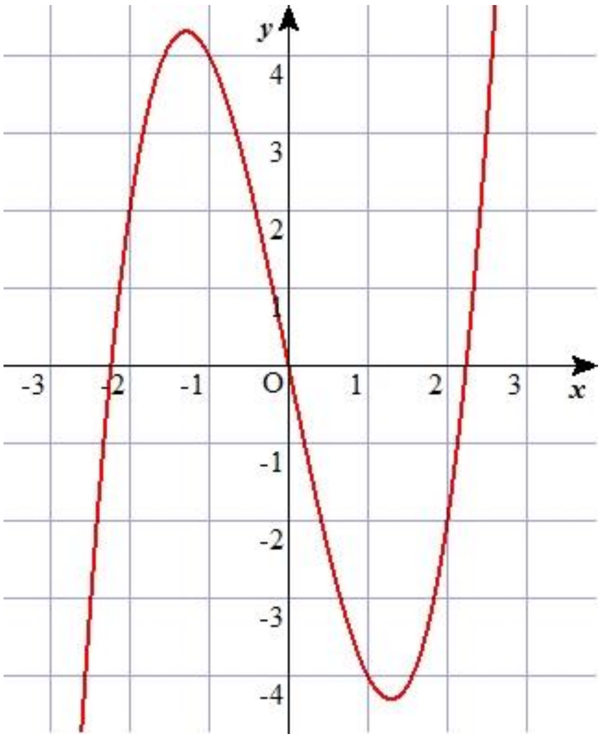
Сљедећа занимљива особина функција је **парност**, односно **непарност**. Кажемо да функција има особину парности, ако предзнак независне промјенљиве *x* не утиче на вриједност зависно промјенљиве *y*. Функција има особину непарности, ако се промјеном предзнака независно промјенљиве мјења предзнак зависно промјенљиве. Прецизније:

$$(\forall x \in \boldsymbol{D})\ f(-x) = f(x) \text{ – парна,}$$
$$(\forall x \in \boldsymbol{D})\ f(-x) = -f(x) \text{ – непарна.}$$

Функција углавном нити је парна нити је непарна, али на примјер, функција $y = x^4 - 5x^2$ је парна, а функција $y = x^3 - 5x$ непарна. Ове двије су представљене сљедећим графовима. Лијево (плава) је парна, а десно (црвена) непарна.

Примјетимо да је прва од функција на датим графовима осно симетрична (*y*-оса је оса симетрије), а друга центранлно симетрична (центар симетрије је тачка *O*). Лако се увјерити да је у Декартовом систему свака парна функција осно симетрична око ординате, и да је свака непарна функција централно симетрична (са центром симетрије исходиштем).





Када је тачка графа функције испод *x*-осе, тада је ордината тачке негативна, односно функција је негативна. Слично, апсцисе тачака графа имају позитивне ординате, ако су те тачке изнад *x*-осе. Сама прелазна тачку, гдје граф функције сјече x-осу, односно њена ордината, назива се **нула функције**.

Функција *f* је **растућа** на неком интервалу домена $(a,b) \subseteq \boldsymbol{D}$, ако за свака два броја $x_1, x_2 \in (a,b)$ важи импликација $x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$. Када релацију мање или једнако на оба мјеста ове импликације замјенимо са строго мање (<), тада кажемо да је функција **строго растућа**.

Функција *f* је **опадајућа** на неком интервалу домена $(a,b) \subseteq \boldsymbol{D}$, ако за свака два броја $x_1, x_2 \in (a,b)$ важи импликација $x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$. Када релацију мање или једнако ове импликације замјенимо са строго мање (<), а релацију веће или једнако са строго веће (>), тада кажемо да је функција **строго опадајућа**.

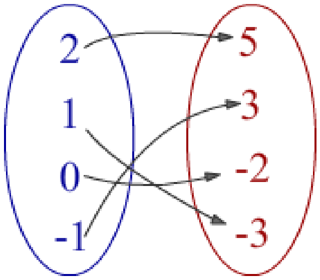
Када гледамо дуж апсциса у координатном систему, тамо гдје ординате графа функције расту - функција расте, а гдје опадају – функција опада. На првом (плавом) претходном графу видимо да је функција опадајућа за све $x \le -\frac{\sqrt{10}}{2} \approx -1.58$, затим је растућа до x = 0, па опадајућа до $x = \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1.58$, а онда до краја (за свако $\frac{\sqrt{10}}{2} \le x < \infty$) растућа. Друга функција (црвена) је растућа за свако $x \le -\frac{\sqrt{15}}{3} \approx -1.29$, затим је опадајућа за све $x \in (-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3})$, па је опет растућа за $x \ge \frac{\sqrt{15}}{3} \approx 1.29$.

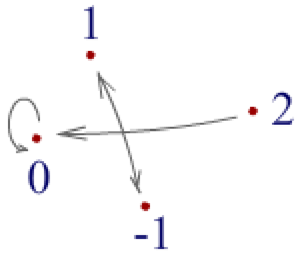
Мјеста промјене раста-падања функције су тачке које називамо (локални) **екстреми функције**. Екстремна вриједност функције може бити (локални) **минимум**, или **максимум**. Тачка функције има минималну (максималну) ординату када постоји бар нека њена (мала) околина у којој је вриједност те ординате најмања (највећа).

Функција f је **ограничена** ако постоје бројеви m и M за које вриједи $(\forall x \in \boldsymbol{D})\ m \le f(x) \le M$. Посебно, функција је **ограничена одоздо** $(\exists m)(\forall x \in \boldsymbol{D})\ m \le f(x)$, или **ограничена одозго** $f(x) \le M$.

Задаци 1.1.3.

1. **а)** Представити у Декартовом правоуглом систему функције.





$$f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

б) Које су од ових функција бијекције?

в) Које су парне, односно непарне?

2. Представити у облику $y = f(x)$

$f(2x-3) = 3x+2$, $\quad f\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right) = \dfrac{3x+2}{2x-3}$, $\quad 2f(x) + 3f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x-3$.

Да ли је нека од ових функција парна, или непарна?

3. Нацртаи граф и описати ток функције

$y = |x| - 1$, $\quad y = |x-2| + 1$, $\quad y = |x+1| - 2$.

4. Нацртати граф и описати ток функције

$f(x) = x^2 - 4x - 5$, $\quad f(x) = x^3 - 3x$, $\quad f(x) = x^4 - 2x^2$.

Која од ових функција је парна, или непарна?

5. Наћи инверзну (реалну) функцију функције

$f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+2}$, $\quad f(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$, $\quad f(x) = \sin x - \cos x$.

6. Испитати ограниченост функције

$y = \sin x + \cos x$, $\quad y = \dfrac{2|x|+1}{|x|+1}$, $\quad y = \dfrac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}$.

1.2. Алгебарске функције

Релне функције реалне промјенљииве се често називају **елементарне** функције. Њих обично дјелимо на **алгебарске** и **трансцедентне** функције. Функција је **алгебарска**, ако се за израчунавање

зависне промјенљиве користе само алгебарске операције: сабирање, одузимање, множење, дјељење и степеновање, а то су

1. цјеле рационалне функције (полиноми),
2. разломљене рационалне функције, и
3. ирационалне функције.

Рационалне функције у ширем смислу су константне, полиноми и количници полинома.

Константна функција узима увијек исту вриједност, без обзира на вриједност промјенљиве. На примјер, константна функција $f(x) = 5$ има вриједност пет, за сваку вриједност x. Њен граф у Декартовом правоуглом систему координата је права паралелна x-оси на висини пет.

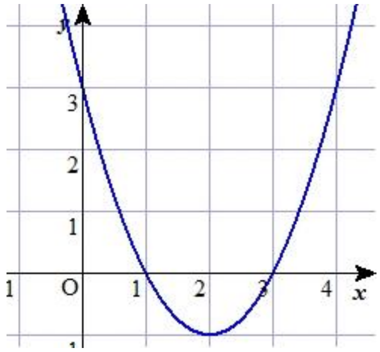
Полиноми су функције облика

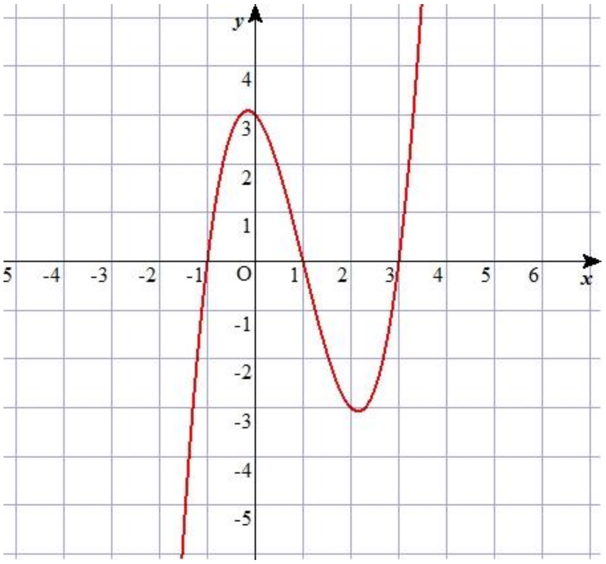
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

гдје су a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 реалне константе. На примјер, парабола

$$f(x) = x^2 - 4x + 3,$$

чији је граф на слици десно. Њене нуле су $x = 1$ и $x = 3$. Лијево и десно од нула, ова парабола је позитивна, између ($1 < x < 3$) је негативна. Тјеме параболе је тачка (2,-1), а то је и њен минимум. Лијево од тјемена дата парабола је опадајућа, десно је растућа функција.





На лијевој страни је кубна функција

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

Нуле ове функције су $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, а то су мјеста гдје граф сјече (или додирује) осу x. Са друге стране, када је апсциса $x = 0$, тада добијамо ординату графа $f(0) = 3$, а то је тачка гдје граф сјече y, тј f осу. Како се налазе екстремне вриједности то ћемо видјети касније, овдје само констатујмо да (локални) максимум и минимум дате фукције имају апсцисе

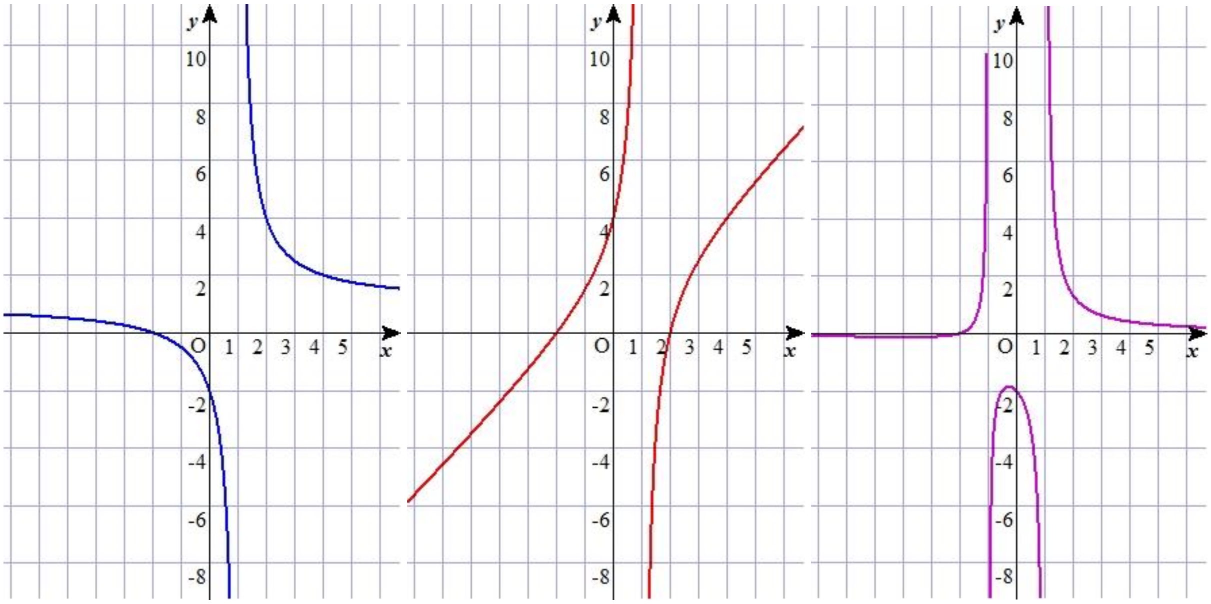
$$\frac{3 \mp 2\sqrt{3}}{3} \approx \begin{cases} -0{,}15 \\ +2{,}15 \end{cases}$$

Функција је растућа (за x) од $-\infty$ до првог екстрема (максимума), затим је опадајућа до Другог екстрема (минимума), па опет растућа до $+\infty$.

График полиномске функције је **непрекидна** крива, што грубо речено значи да нема прекида у графу функције. Друго, полиномска функција је **глатка** крива – граф садржи само заобљене дјелове без оштрих углова. Даље, полиномска функција степена n има највише n - 1 кривину и сјече x-осу највише n пута, тј. има максимално n реалних нула.

Рационална , или **разломљена функција** је облика $r(x)$ = $\frac{f(x)}{g(x)}$, гдје су називник g и бројник f (алгебарски) полиноми. Подразимјева се да се полиноми f и g не нулирају у истим апсцисама. За оне вриједности апсцисе $x = x_0$ за које је бројник нула, када је $f(x_0) = 0$, тада имамо нуле функције $r(x)$. Међутим, када је називник нула, рецимо $g(a) = 0$, тада имамо **вертикалну асимптоту** $x = a$ функције $r(x)$. Грубо речено, права $x = a$ је вертикална асимптота, ако јој се функција приближава све више и више, али без додиривања. Прецизније, линија $x = a$ је вертикална асимптота графика функције $f(x)$ ако $f(x) \to \pm\infty$ када x тежи ка „a“ било с лијеве или с десне стране.

Примјер 1.2.1.



На сликама су дате функције, редом:

1. $r_1(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ има нулу за x = -2 и вертикалну асипмптоту x = 1,
2. $r_2(x) = \dfrac{x^2-4}{x-1}$ има нуле ± 2 и вертикалну асимптоту x = 1,
3. $r_3(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$ има нулу -2 и вертикалне асипмптоте $x = \pm 1$.

Прва је свуда опадајућа, друга је свугдје растућа, трећа је у интервалу апсциса $(-\infty,0)$ растућа, затим у интералу $(0,+\infty)$ је опадајућа. Само трећа од наведених функција има екстрем и то (локални) максимум f = -2, за x = 0.♦

Вертикалне асимптоте појављују се са апсцисама у којима је функција недефинисана, тј. у тачкама x_0 рационалне фукције $r(x)$ = $\frac{f(x)}{g(x)}$ у којима је $g(x_0) = 0$. Примјетимо да рационалне функције из претходних примјера имају такође и хоризонталне, односно косе асимптоте.

Рационална функција $r(x) = f(x)/g(x)$ је **несводљива**, ако су полиноми $f(x)$ и $g(x)$ релативно прости.

Примјер 1.2.2. Разломак $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$ након скраћивања постаје несводљив $\frac{x-1}{x+2}$. Први је сводљива, други несводљива рационална функција, а обе те функције имају исте вриједности у свим тачкама за које је скраћени израз различит од нуле, тј. $x + 2 \neq 0$. У спорној тачки ($x = 2$) први разломак нема смисла, други има вриједност -1/2.♦

Степен полинома је број највећег експонента на зависној промјенљивој. На примјер, степен параболе $y(x) = x^2 - 4x + 3$ је 2. Ако су степени полинома $f_m(x)$ и $g_n(x)$ редом m и n, онда рационална функција $f_m(x)/g_n(x)$ има степен $m - n$.

Права рационална функција је она код које је степен полинома у бројнику мањи од степена полинома у називнику. У супротном случају, ради се о **неправој** рационалној функцији.

Свака рационална функција увијек се може представити као збир једног полинома и једне праве рационалне функције.

Примјер 1.2.3. Дата је рационална функција

$$r(x) = \frac{x^6 + 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 4x - 7}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

Дијељењем бројника називником добијамо

$$\begin{array}{l}
(x^6 + 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 4x - 7) : (x^4 + 5x^2 + 4) = x^2 - 2 \\
\underline{x^6 + 5x^4 \qquad + 4x^2} \\
\quad -2x^4 + x^3 - 9x^2 + 4x - 7 \\
\quad \underline{-2x^4 \qquad - 10x^2 \qquad -8} \\
\qquad\quad x^3 + x^2 + 4x + 1
\end{array}$$

тј.

$$r(x) = x^2 - 2 + \frac{x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4}.♦$$

Функције облика

$$x \to \frac{A}{(x - x_0)^n} \text{ и } x \to \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n},$$

гдје је $n = 1, 2, 3, \ldots$, а A, B, x_0, p, q су реалне константе и дискриминанта квадратног полинома у називнику $p^2 - 4q < 0$, су прости, или **парцијални разломци**.

Ако су нуле називника једноструке и реалне, тј. $g(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$, функција $r(x)$ се може написати у облику

$$r(x) = \frac{f_m(x)}{g_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

гдје су A_1, A_2, …, A_n реалне константе. Ако су нултачке називника вишеструке и реалне, тј.

$$g_n(x) = (x - x_1)^{j_1}(x - x_2)^{j_2}\dots(x - x_k)^{j_k}\text{, гдје је , } j_1 + j_2 + \dots + j_k = n,$$

функција $r(x)$ се може раставити на сљедећи начин

$$r(x) = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1j_1}}{(x - x_1)^{j_1}} +$$

$$+ \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{A_{2j_2}}{(x - x_2)^{j_2}} +$$

$$\dots$$

$$+ \frac{A_{k1}}{x - x_k} + \frac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{A_{kj_2}}{(x - x_k)^{j_k}}.$$

Ако су нултачке називника парови коњуговано комплексних бројева вишеструкости k, тада функцију $r(x)$ можемо раставити на сљедећи начин

$$r(x) = \frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_k x + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}.$$

Ирационалне функције су оне које поред наведених допуштају и операције корјеновања. Такве су на примјер $f(x) = 5x - \sqrt[3]{x}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x - 1}{3x^2 - 2}}$, … .

Задаци 1.2.4.

1. Наћи и скицирати кубну функцију која има нуле у тачкама -2, 1, 3, а растућа је у околини 1.

2. Наћи и скицирати кубну функцију која има нуле у 2 и 4, гдје је 4 двострука нула, а опадајућа је испред 4.

3. Наћи нуле и вертикалне асимптоте функције

$$y = \frac{5}{x - 4}, \qquad y = \frac{2 - x}{3 + x}, \qquad y = \frac{x^2 + 2x}{2 - x}, \qquad y = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

4. Наћи количник и остатак дјељења ($2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1$) : ($x^2 - 2x$).

[количник је $2x^2 + 5x + 7$, остатак $15x - 1$, јер:

$$\left(2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1\right) : \left(x^2 - 2x\right) = 2x^2 + 5x + 7$$
$$\underline{2x^4 - 4x^3}$$
$$5x^3 - 3x^2 + x - 1$$
$$\underline{5x^3 - 10x^2}$$
$$7x^2 + x - 1$$
$$\underline{7x^2 - 14x}$$
$$15x - 1$$

}

5. Представити у облику збира полинома и праве рационалне функције:

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 3x - 1}{x^2 - 1}, \qquad f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x}{x^2 + x}, \qquad f(x) = \frac{x^4 - x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - x}.$$

6. Разложити у парцијалне разломке:

$$y(x) = \frac{2x+3}{x^2 + x}, \qquad y(x) = \frac{4x+13}{x^2 - x - 6}, \qquad y(x) = \frac{x^2 + 4}{3x^3 + 4x^2 - 4x},$$

$$y(x) = \frac{x^2 - 29x + 5}{(x-4)^2(x^2+3)}, \qquad y(x) = \frac{x^3 + 10x^2 + 3x + 36}{(x-1)(x^2+4)^2}, \qquad y(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2}.$$

[..., $\frac{1}{x-4} + \frac{5}{(x-4)^2} + \frac{-x+2}{x^2+3}$, $\frac{2}{x-1} + \frac{-2x-1}{x^2+4} + \frac{x}{(x+4)^2}$, $x - 2 - \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x-3}$.]

7*. Одредити бројеве *a*, *b*, *p*, *q* тако да је

$$x^3 + 15x^2 + 3x + 5 = p(x - a)^3 + q(x - b)^3,$$

а затим одредити реалан корјен једначине

$$x^3 + 15x^2 + 3x + 5 = 0.$$

[$x = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}$]

8*. Одредити коефицијенте *a*, *b*, *c* тако да израз

$$\frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x-1} + \frac{x^3 + bx^2 + cx + a}{x-2} + \frac{x^3 + cx^2 + ax + b}{x-3}$$

Буде полином.

[a = 4.2, b = -0.9, c = -4.3]

1.3 Трансцедентне функције

Све функције које нису алгебарске називамо **трансцедентне**. Најважније међу њима су:

1. експоненцијална функција,
2. логаритамска функција,
3. тригонометријске функције,
4. циклометријске функције.

1.3.1. Експоненцијална функција

Нека је дат реални број $b > 0$, $b \neq 1$. Функцију f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}+$

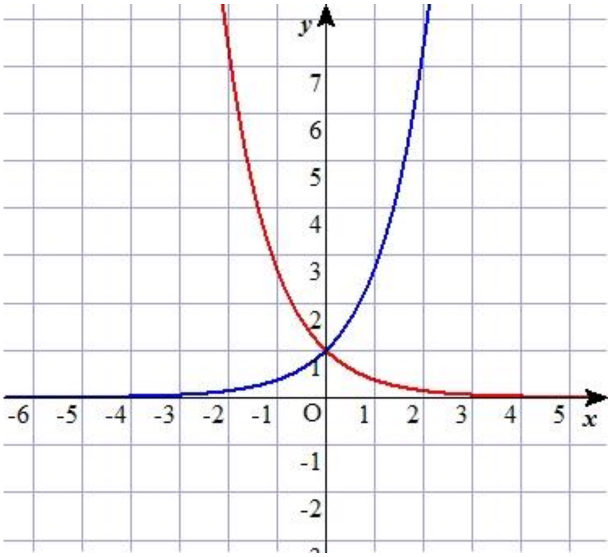
$$(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = b^x$$

Називамо **експоненцијалном функцијом** базе b.

Као што се види из наведене дефиниције, домен ($\mathbb{R}$) експоненцијалне функције су сви реални бројеви. Кодомен ($\mathbb{R}+$) су сви позитивни реални бројеви.

Посебно, ако је $b > 1$, онда је f строго растућа, а ако је $b < 1$, онда је f строго падајућа. На слици десно су оба графа, растући (плави) је граф експоненцијалне фунције базе e = 2,71828… , а падајући је граф експоненцијалне функције базе $e^{-1} \approx 0{,}36788$.
Примјетимо да је експоненцијална функција бијекција.
Број e назива се **Ојлеров**, или природни број, или база природног логаритма. Такође је

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$



$y = e^x$ $\qquad$ $y = e^{-x}$

1.3.2. Логаритамска функција

Инверзна функција експоненцијалне назива се **логаритамска функција** базе b и означавамо је са

$$f(x) = \log_b x.$$

Домен логаритамске ($\mathbb{R}+$) је кодомен експоненцијалне функције исте базе, и обрнуто. Према овој дефиницији, због $f(f^{-1}(x)) = x$ и $f^{-1}(f(x)) = x$, биће

$$(\forall x \in \mathbb{R}+)\ b^{\log_b x} = x, \text{ и } (\forall x \in \mathbb{R})\ \log_b b^x = x.$$

Посљедице су $\log_b b = 1$ и $\log_b 1 = 0$. Затим, лако доказујемо да је ($\forall x_1, x_2 > 0$):

$$\log_b(x_1 x_2) = \log_b x_1 + \log_b x_2\,,\ \log_b \frac{x_1}{x_2} = \log_b x_1 - \log_b x_2\ ,$$

што слиједи из $b^{x_1} \cdot b^{x_2} = b^{x_1+x_2}$ и $b^{x_1} : b^{x_2} = b^{x_1-x_2}$ логаритмовањем, и

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall a > 0)\ \log_b a^x = x \log_b a\,.$$

Наиме, из $\log_b a^x = y$, према дефиницији логаритма је $a^x = b^y$, тј. $a = b^{\frac{y}{x}}$, а отуда $\frac{y}{x} = \log_b a$, тј. $y = x \log_b a$. Према томе, први и посљедњи израз су једнаки, односно једнаке су стране тражене једнакости. Такође, лако доказујемо формулу за прелазак из базе у базу $c > 0, \neq 1$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}.$$

Наведени идентитет слиједи из $(\log_b x)\cdot(\log_c b) = \log_c b^{\log_b x} = \log_c x$. Посљедица је идентитет

$$\log_b c = \frac{1}{\log_c b}.$$

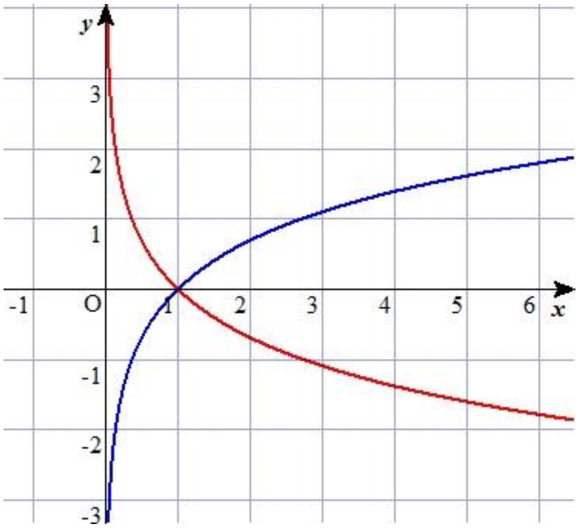
Уопште, граф функције, која је бијекција и има инверзну функцију, и граф њене инверзне функције су осно симетрични у односу на симетралу I и III квадранта (y = x).

На слици десно су логаритамске функције база:

e = 2,71828... и $e^{-1} \approx$ 0,36788.

Логаритамске функције база 10, односно e називају се **декадски**, односно **природни** логаритам (*log naturalis*), и имају посебне ознаке, редом:

$\log_{10} x = \log x$, односно $\ln x = \log_e x$.



$y = \ln x$ $\qquad$ $y = 1/\ln x$

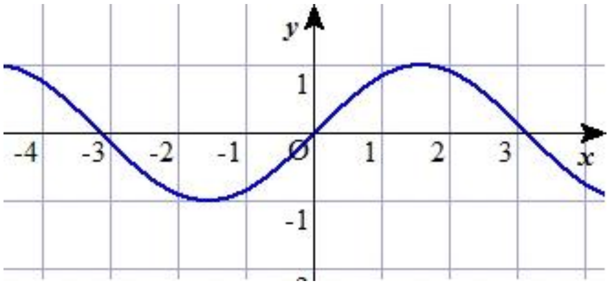
1.3.3. Тригонометријске функције

Синусна функција, $\sin : \mathbb{R} \to [-1,+1]$, је непарна и периодична функција са периодом 2π. Њен граф је **синусоида**, први од четири доле. Као што видимо синусна функција је сурјекција („на“).

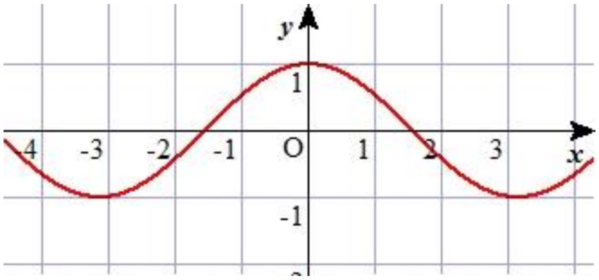
Косинусна функција, cos : $\mathbb{R} \to [-1,+1]$, је парна, али такође периодична функција са периодом 2π. Њен граф се назива **косинусоида**, али и синусоида, јер се може добити из синусоиде транслацијом по *x*-оси за $\frac{\pi}{2}$. Према томе, косинусна функција је такође сурјективна.

Тангенсна функција, tg : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, је количник синусне и косинусне функције. Дакле, она је непарна и периодична са периодом π. Има вертикалне асимптоте $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

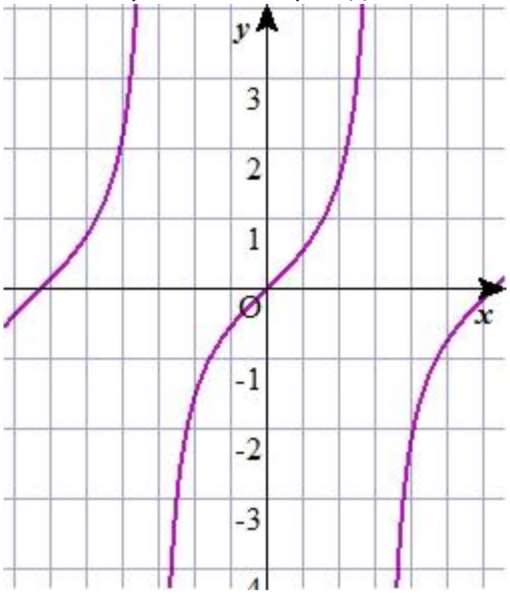
Котангенсна функција, ctg : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, је количник косинусне и синусне функције. И она је непарна и периодична са периодом π, а вертикалне асимптоте су $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Котангенсоида је осно симетрична слика тангенсоиде у односу на *x*-осу, и у односу на исту осу транслирана за $\frac{\pi}{2}$.



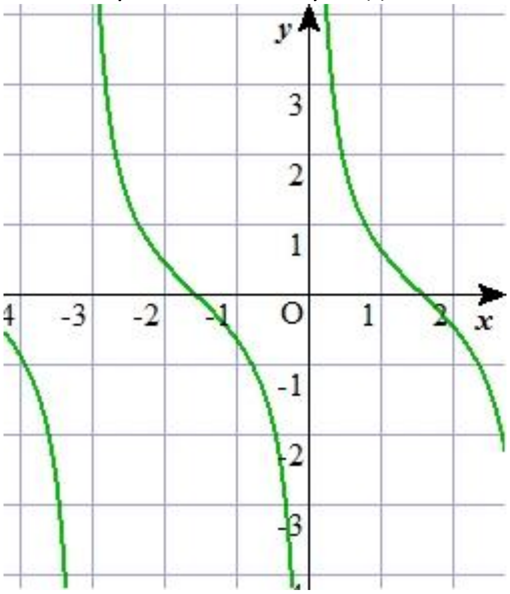
y = sin *x* - синусоида



y = cos x - косинусоида



y = tg x – тангенсоида



y = ctg x – котангенсоида

Знамо да за тригонометријске функције важе основни идентитети ($\forall x \in \mathbb{R}$):

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1\ , \ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x\ , \ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x\ .$$

Адиционе формуле:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \ \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.$$

Формуле за двоструке углове:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \ \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Формуле за превођење збира у производ:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \ \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Формуле за превођење производа у збир:

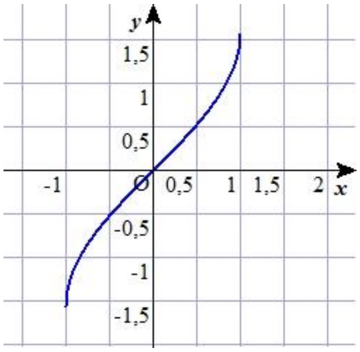
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)],$$

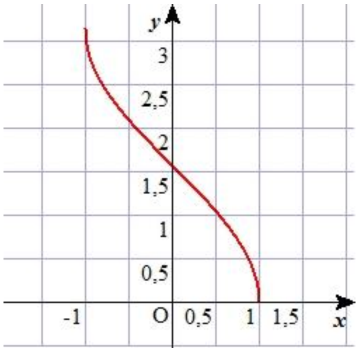
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)].$$

1.3.4. Циклометријске функције

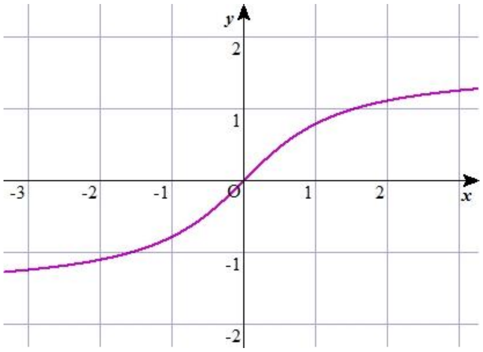
То су инверзне тригонометријске функције.



аркус синус



аркус косинус



аркус тангенс

Аркус синус функција је инверзна функција синусној, на оном дијелу домена гдје је синусна функција бијекција. Тако је arc sin = $\sin^{-1}$: [-1,+1] $\to \left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$, односно

sin(arc sin *x*) = *x* (|*x*| < 1), и arc sin(sin x) = x (x $\in$ [-π/2, +π/2].).

Аркус косинус је инверзна функција косинусне, на интервалу [0,π]. Тада је косинус строго падајућа бијекција, па је arc cos = $\cos^{-1}$: [-1, 1] $\to$ [0, π].

Аркус тангенс је инверзна функција тангенсу, arc tg = tg^{-1} : $\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$.

Аркус котангенс је инверзна фукција котангенсу, arc ctg = ctg-1 : $\mathbb{R} \to$ (0, π).

Слично аркус синусу и аркус косинусу, графови функција аркус тангенс и аркус котангенс се преводе транслацијом за π/2 дуж *y*-осе и огледањем око те осе.

1.3.5. Хиперболне функције

Хиперболне тригонометријске функције су синус, косинус, тангенс и котангенс хиперболни:

$$\mathrm{sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathrm{ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathrm{th}\,x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x},\ \mathrm{cth}\,x = \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}.$$

Инверзне функције хиперболним називају се ареа функције.

Задаци 1.3.6.

1. Испитати парност-непарност функција

$$f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2},\qquad f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2},\qquad f(x) = x^3 - 3x - \sin x,$$

$$f(x) = \frac{\mathrm{tg}\,x}{x},\qquad f(x) = \frac{\cos x}{x},\qquad f(x) = 2\sin x - 5\,\mathrm{ctg}\,x.$$

2. Наћи нул-тачке функција

$$y(x) = \log\frac{3x+4}{2x-3},\qquad y(x) = \log_2(3x^2 - 5x - 2),\qquad y(x) = 2\ln^2 x - 7\ln x + 4.$$

3. Наћи домен и кодомен функција

$$z(x) = \sqrt{-4^x + 6\cdot 2^x - 8},\qquad z(x) = \log\frac{x-1}{x+1},\qquad z(x) = [\ln(x-3)]^{-1}.$$

4. Одредити периоде функција

$$y = \sin\frac{2x}{3},\qquad y = \mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,2x,\qquad y = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{3x}{5}.$$

5. Одредити амплитуду и нуле функције $f(x) = a\sin x + b\cos x$, па скицирати граф функције

$$3\sin x - 4\cos x, \qquad 2\cos x - 5\sin x, \qquad (3\,\mathrm{tg}\,x + 4\,\mathrm{ctg}\,x)\sin 2x.$$

6. Показати да свако *x* важи

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi, \qquad \cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \mathrm{tg}^{-1}\, x + \mathrm{ctg}^{-1}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

1.4 Посебне функције

Ако је *y* функција од *g*, тј. *y* = *y*(*g*), а *g* је функција од *x*, тј. *g* = *g*(*x*), онда *y* зовемо **сложеном функцијом** од *x*. Пишемо

$$y = y[g(x)], \text{ односно } y = f(x).$$

На примјер, функција $f(x) = \log_2(x^2 + 3x + 5)$ је сложена од једне алгебарске ($g = x^2 + 3x + 5$) и једне трансцедентнте ($y = \log_2 g$).

Експлицитни (лат. *explicare* – развити, разложити) облик функције се може написати овако

$$y = f(x).$$

На лијевој страни једнакости је зависно промјенљива, а на другој све остало, тј. израз у којем се појављује само независно промјенљива. Такаве су, на примјер, експлицитни облик једначине праве, квадратна функција, полукружница:

$$y = 2x - 3,\; y = x^2 - 2x + 3,\; y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Имплицитни (лат. *Implicare* – уплести, умотати) облик функције је

$$F(x, y) = 0.$$

На лијевој страни једнакости је израз који садржи све промјенљиве, а десно је нула.Таква је на примјер, једначина елипсе

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0.$$

Превођење експлицитног у имплицитни облик функције је једноставно, простим пребацивањем сега са десне на лијеву страну једнакости. Обратно, превођење имплицитног у експлицитни облик је тешко, а понекад и немогуће. На примјер, веома је тешко експлицитно изразити, израчунати *y* помоћу *x*-а функције

$$xy + \cos y = 0.$$

Инверзна, обрнута функција функције $y = f(x)$ пресликава елементе кодомена дате функције у елементе домена, али на начин функције. Знамо да таква постоји само ако је функција f бијекција и тада важи

$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad f^{-1}(f(x)) = x,$$

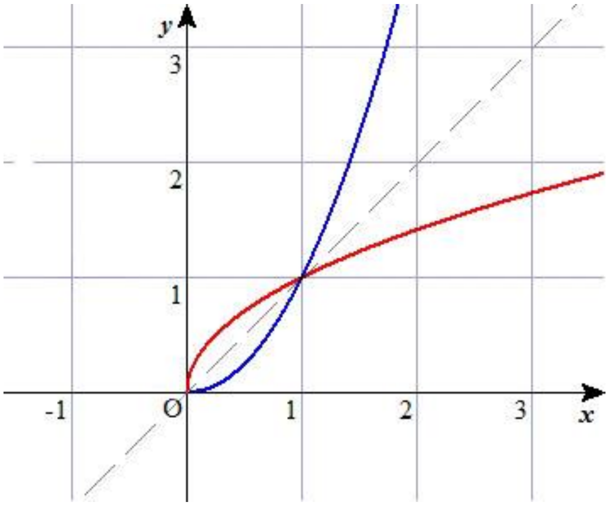
што пишемо краће $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

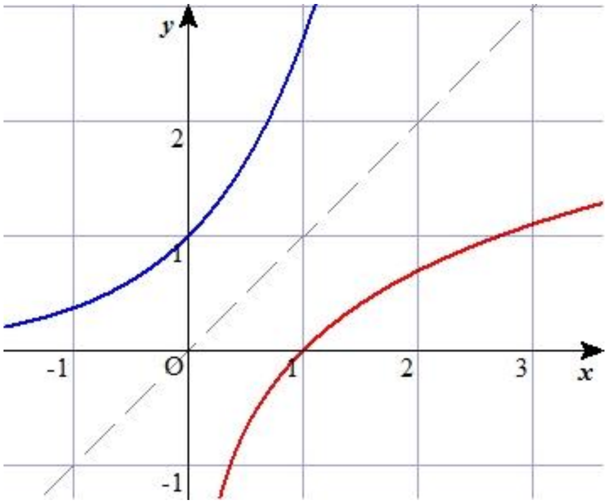
На примјер, површина квадрата (P) се добија квадрирањем дужине његовестранице (a), а обрнуто, дужина странице квадрата је други корјен његове површине, тј.

$$P = a^2, \quad a = \sqrt{P}.$$

Граф функције и њене симетричне функције су симетрични у односу на праву $y = x$, симетралу I и III квадранта.

На првој слједећој слици (лијево) су узајамно инверзне функције $y = x^2$, за $x \geq 0$ (плава), $y = \sqrt{x}$ (црвена), и симетрала I и III квадранта (испрекидана сива). На другој слици (десно) су инверзне функције $y = e^x$ и $y = \ln x$, гдје је e = 2,71828... база природног логаритма.





Задаци 1.4.1.

1. Од којих функција је сложена функција

$$2^{5x-3}, \qquad 5\,\text{tg}\,x - 3, \qquad \cos(5x-3) + \sin(5x-3).$$

2. Написати у експлицитном облику функције

$$xy - 2 = 0, \qquad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \qquad 2x^2 - 3xy + y^2 + 2x - 3y - 4 = 0.$$

3. Како гласи имплицитни облик функицје

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \text{ ?}$$

4. Доказати да је функција инверзна линеарној такође линеарна.

5. Показати да су функције саме себи инверзне

$$y = x, \qquad x^2 + y^2 = r^2, \qquad y = \frac{1}{x}.$$

Показати то и графички.

6. Наћи графички и рачуном за које се вриједности независне промјенљиве поништавају функције

$$x^2 - 3x + 2, \qquad x^3 - 9, \qquad x - \sqrt{x}.$$

7. Графички рјешити једначине

$$x^2 + (x-2)^2 = 8, \qquad x + 2^x = 0, \qquad \sin x = \log_2 x.$$

2. Лимеси

Ако промјенљива x узима вриједности из бесконачног низа вриједности x_1, x_2, x_3, … које се све више и више приближавају сталној вриједности x_0 тако да апсолутна вриједност $|x - x_0|$ постаје и остаје мања од произвољно малог позитивног броја, тада кажемо да дата промјенљива, односно дати низ, тежи или **конвергира према граничној вриједности** x_0 и пишемо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \text{ или } x_n \to x_0 \text{ када } n \to \infty.$$

Када промјенљива x мјењајући се у интервалу (a,b) конвергира према граници x_0 тако да може узети сваку вриједност датог интервала, онда кажемо да је промјенљива **непрекидна** у том интервалу и да се приближава својој граници на непрекидан начин.

Нека су дата **два конвергентна низа** $x_1, x_2, x_3, \ldots \to x_0$ и $y_1, y_2, y_3, \ldots \to y_0$. Дакле, њихове граничне вриједности су $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. Ставимо ли

$$x_n = x_0 + \delta_n \text{ и } y_n = y_0 + \varepsilon_n,$$

тада $\delta_n \to 0$ и $\varepsilon_n \to 0$ када $n \to \infty$. Општи члан збира $x_1 + y_1$, $x_2 + y_2$, $x_3 + y_3$, … , је

$$x_n + y_n = (x_0 + \delta_n) + (y_0 + \varepsilon_n) = x_0 + y_0 + \delta_n + \varepsilon_n, \text{ тј.}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x_0 + y_0 + 0 + 0 = x_0 + y_0.$$

Резимирајући, пишемо

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Дакле, сабирањем конвергентних низова добијамо нови конвергентни низ чије је гранична вриједност једнака збиру граничних вриједности датих низова. Краће кажемо, лимес збира једнак је збиру лимеса.

Слично се доказује тврђење: лимес разлике, производа, или количника једнак је разлици, производу, односно количнику лимеса. За ово посљедње је потребно да је лимес количника различит од нуле.

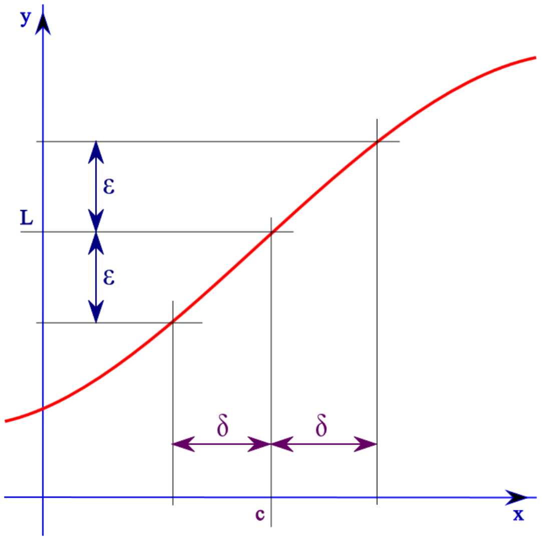
Став 2.0.1. Ако су (x_n) и (y_n)конвергентни низови, тада је

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$,
2. $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$,
3. $\lim_{n\to\infty}(x_n : y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) : \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$, када $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$.♦

2.1. Лимес функције

Дефиниција 2.1.1.

Нека је функција f дефинисана у некој околини тачке c, осим, можда, у самој тачки c. Број L називамо **граничном вриједношћу функције** f када x тежи c, ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, за које из неједнакости $0 < |x - c| < \delta$ слиједи неједнакост $|f(x) - L| < \varepsilon$. Тада пишемо



$$\lim_{x \to c} f(x) = L . \blacklozenge$$

На графу десно[1] можемо лакше разумјети значење ове дефиниције. Све апсцисе x из околине $(c-\delta, c+\delta)$ се датом функцијом пресликавају у ординате y из околине $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Штавише, ма како био мали полупречник $\varepsilon > 0$ друге околине, увијек постоји неки полупречник δ прве околине, тако да важи наведена импликација. Зато $f(x) \to L$, када $x \to c$, што пишемо и $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Непрекидност функције у тачки дефинишемо на сличан начин (деф. 2.1.1.).

Дефиниција 2.1.2.

Функција f је **непрекидна у тачки** x_0, ако и само ако је

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) . \blacklozenge$$

Посљедица ових дефиниција је да је гранична вриједност функције непрекидне у некој тачки једнака вриједности функције у тој тачки. На примјер, $\lim_{x \to 3}(x^2 - 4) = 3^2 - 4 = 5$.

Обратно, ако функција f није непрекидна (има прекид, или није дефинисана) у некој тачки x_0, али има граничну вриједност у тој тачки, она се може допунити до функције F која је непрекидна у датој тачки и поклапа се са функцијом f у свим осталим тачкама њеног домена. Тада можемо писати

$$\lim_{x \to x_0} f(x_0) = \lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) .$$

Примјер 2.1.3. $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$ функција

[1] Слика је из Википедије: http://en.wikipedia.org/wiki/Limit_(mathematics).

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^3-1}$$

није дефинисана у тачки x = 1. Наиме, израз *f*(1) није дефинисан јер садржи дијељење нулом, а *x* =1 је једина тачка изван домена $\mathbb{R}$ ове функције. Међутим, растављањем на факторе налазимо

$$\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Израз десно од једанкости је скраћени разломак, чија вриједност је једнака вриједности функције у свим тачкама домена функције *f* , док у тачки x = 1 тај разломак има вриједност $\frac{2}{3}$. Сам за себе, скраћени разломак је непрекидна функција ($\forall x\in\mathbb{R}$)

$$F(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Са друге стране, је

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} F(x)=\frac{2}{3}.$$

Ако умјесто функције *f* узмемо функцију *F*, допунити ћемо је са само једном тачком домена (*x* = 1) и добити непрекидну функцију идентички једнаку првобитној у свим тачкама домена првобитне.♦

Примјер 2.1.4. Дата је функција

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1},\ x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Она није дефинисана у тачки x = 0. Међутим, након проширивања разломка

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-1}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}$$

$$=\frac{(x+1)-1}{|x+1|-1}\cdot F(x),$$

гдје смо ставили

$$F(x) = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Након скраћивања добијамо

$$f(x) = F(x), \text{ за } x \neq 0.$$

Према томе, имамо

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} F(x) = \frac{2}{3},$$

а нова функција непрекидна у новом домену, који је допуњен само једном тачком, $x = 0$.♦

Ове методе, проширивање разломака ради скраћивања и избјегавања неодређености, понекад је могуће користити и у осталим случајевима неодређености (облика: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$).

Примјер 2.1.5. Израчунати $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

Рјешење. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$, јер је бројник константан (јединица), док називник неограничено расте када x тежи бесконачности.♦

Задаци 2.1.6.

1. Доказати према дефиницији да је

$$\lim_{x\to 5}\frac{3}{x} = \frac{3}{5}, \qquad \lim_{x\to 0}\sqrt{x+3} = \sqrt{3}.$$

2. Израчунати граничне вриједности

$$\lim_{x\to 2}(x^2-2x+3), \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{x}.$$

3. Одредити лимесе

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^3+1}, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}, \ (m, n \in \mathbb{N}) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}.$$

4. Наћи граничне вриједности

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-5x}),\qquad \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x}-x),$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right),\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right).$$

5. Наћи лимесе

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[6]{x}}{\sqrt[8]{x}-\sqrt[12]{x}},$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{8\sqrt{x}-x^2}{8-4\sqrt{x}},\qquad \lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{5x}-5}.$$

6. Израчунати

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}},\qquad \lim_{x\to 2}\frac{2^x+2^{3-x}-6}{\sqrt{2^{-x}}-2^{1-x}}.$$

7. Израчунати $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$, за n = 2, 3, 4, … .

[Због $(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)=a^n-1$ смјеном $a=\sqrt[n]{x+1}$, проширивањем са изразом у загради, па скраћивањем налазимо лимес = $\lim_{x\to 0}\frac{1}{a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1}=\frac{1}{n}$]

2.2. Особине лимеса

Особине лимеса функција и низова су сличне.

Став 2.2.1.

Ако функција f има граничну вриједност у тачки x_0, тада постоји околина те тачке у којој је функција ограничена.

Доказ: Нека је $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$. На основу дефиниције граничне вриједности функције (2.1.1.), за сваку околину (A-ε, A+ε) вриједности функције, постоји околина (x_0-δ, x_0+δ) вриједности промјенљиве, осим можда саме тачке x_0, која се функцијом пресликава у наведену околину функције, односно за коју је $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$.♦

Став 2.2.2.

Ако је $\lim_{x\to x_0} f(x)=A>0$, тада постоји околина тачке x_0 (можда без саме тачке x_0) у којој је $f(x) > 0$.

Доказ: Изаберимо ε > 0, такво да је $A-\varepsilon > 0$, што је могуће јер је $A > 0$. Тада постоји δ > 0 такво да важи импликација: $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. За такву околину тачке x_0 је $f(x) > A-\varepsilon > 0$.♦

Став 2.2.3.

Ако је $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ тада је $\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$.

Доказ: Дато је $\varepsilon > 0$. Знамо да за апсолутне вриједности два броја важи $|a + b| \le |a| + |b|$, па је

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| = |[f(x) - A] + [g(x) - B]| \le |f(x) - A| + |g(x) - B| \quad (*)$$

Из $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ излази да постоји $\delta_1 > 0$ тако да из $0 < |x - x_0| < \delta_1$ слиједи $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Слично, из $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ излази да постоји $\delta_2 > 0$ тако да из $0 < |x - x_0| < \delta_2$ слиједи $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ако је $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тада из $0 < |x - x_0| < \delta$ слиједи истовремено $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$, па се из (*) добија

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

тј. да је

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) + g(x)] = A + B.$$

Слично се доказује за минус[2]. Међутим, то се може доказати и непосредно, јер је $f(x) - g(x) = f(x) + [-g(x)]$.♦

Став 2.2.4.

Ако је $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ тада је $\lim_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$.

Доказ: Нека је дато $\varepsilon > 0$. Ако је $A = 0$ доказ је тривијалан, зато претпоставимо да је $A \ne 0$. Тада имамо

$$|f(x) \cdot g(x) - A \cdot B| = |f(x) \cdot g(x) - A \cdot g(x) + A \cdot g(x) - A \cdot B| =$$

$$= |g(x) \cdot [f(x) - A] + A \cdot [g(x) - B]| \le$$

$$\le |g(x)| \cdot |f(x) - A| + |A| \cdot |g(x) - B|. \quad (*)$$

Због $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ постоји $\delta_1 > 0$ тако да из $0 < |x - x_0| < \delta_1$ слиједи $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}$. У истом интервалу $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ је функција ограничена (став 2.2.1.); нека је $|g(x)| < M$, за неко $M > 0$. Слично, због $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ постоји $\delta_2 > 0$ тако да из $0 < |x - x_0| < \delta_2$ слиједи $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Бирамо ли $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ имаћемо испуњене све три неједнакости

[2] Детаљније о овоме у Вики Архимеду, тј. wiki.elemenat.com, Лимес функције, па: Операције са лимесима.

$$|g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2|A|},\ |g(x)| < M \text{ и } |f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Из (*) и $0 < |x - x_0| < \delta$ добијамо коначно

$$|f(x)\cdot g(x) - A\cdot B| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + |A|\cdot\frac{\varepsilon}{2|A|} = \varepsilon,$$

чиме је тврђење доказано.♦

Став 2.2.5.

Ако је $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ и $B \neq 0$, тада је $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x):g(x)] = A:B$.

Доказ: Из претходних ставова (3 и 4.) имамо слиједеће процјене

$$|f(x):g(x) - A:B| = \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{B\cdot f(x) - A\cdot g(x)}{B\cdot g(x)}\right| =$$

$$= \frac{1}{|B|\cdot|g(x)|}\cdot\left|B\cdot[f(x)-A] - A\cdot[g(x)-B]\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|g(x)|}\cdot|f(x)-A| + \frac{|A|}{|B|\cdot|g(x)|}\cdot|g(x)-B|.$$

Отуда слиједи наведено тврђење.♦

Дакле, лимес збира (разлике, производа, или количника) двије функције једнак је збиру (разлици, производу, или количнику) лимеса тих функција. Сличан став за збир и производ се може доказатати не само за двије, већ и за коначно много фактора. Међутим, ако не постоји један од лимеса, рецимо сабирака, тада не мора постојати нити лимес збира.

Став 2.2.6.

Ако је $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ и ако у некој околини тачке x_0, осим можда у x_0, важи неједнакост $f(x) \leq g(x)$, тада је $A \leq B$.

Доказ: Претпоставимо супротно, да је $A > B$. Из става 2.2.1. слиједи

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = A - B > 0,$$

па према ставу 2.2.2. постоји околина тачке x_0 у којој је $f(x) - g(x) > 0$, тј. $f(x) > g(x)$. Међутим, по претпоставци постоји и околина у којој је $f(x) \leq g(x)$. У мањој од тих двеју околина било би

задовољене обе наведене неједнакости, што је немогуће. Према томе, претпоставка да је $A > B$, је у контрадикцији, што значи да је тачно тврђење става.♦

Став 2.2.7.

Ако је $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A$ и ако у некој околини тачке x_0, осим можда у x_0, важи неједнакост $f(x) \le g(x) \le h(x)$, тада је $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$.

Доказ: Из дате неједнакости слиједи неједнакост $f(x) - A \le g(x) - A \le h(x) - A$ у некој δ-околини тачке x_0, дакле за $0 < |x - x_0| < \delta$. Отуда, у истој околини је $|g(x) - A| \le \max\{|f(x) - A|, |h(x) - A|\}$, јер не знамо да ли су наведене разлике позитивне или негативне. Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. Због претпоставке става, слиједи да постоје бројеви δ_1, $\delta_2 > 0$ такви да је

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon.$$

Бирамо ли $\delta^* = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$, тада закључујемо да важи

$$0 < |x - x_0| < \delta^* \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon,$$

тј. $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$, што је и требало доказати.♦

Даље се могу доказивати и сљедеће особине лимеса.

Став 2.2.8.

1. $\lim_{x\to x_0} C = C$, гдје је C константа.
2. $\lim_{x\to x_0} Cf(x) = C \lim_{x\to x_0} f(x)$.
3. $\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.
4. $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$.
5. $\lim_{x\to x_0} \left(\log_b f(x)\right) = \log_b \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$.♦

Примјер[3] 2.2.9. Одредити граничну вриједност

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x^3-1}\right).$$

---

[3] Др Милутин Обрадовић, др Душан Грегоријевић: МАТЕМАТИКА са збирком задатака, за IV разред средње школе, четврто издање, Београд 1994.

Рјешење: Из

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2} \text{ и}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}$$

слиједи да можемо примјенити став 2.2.3. и да је резултат

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{x^3-1}\right) = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}.\blacklozenge$$

Примјер 2.2.10. Наћи $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$.

Рјешење: У овом случају не можемо примјенити став 2.2.3. јер не постоје лимеси сабирака. Међутим, дату функцију, израз у загради можемо преуредити

$$\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+2}{x^2+x+1}.$$

Затим узмемо лимес, и добијамо 1 када $x\to1$.♦

Примјер 2.2.11. Израчунати $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1}$.

Рјешење: Користимо резултат претходног (задаци 2.1.6.) задатка 7. Добијамо

$$\text{лимес} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}}{\frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}} = \frac{\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}}{\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}} = \frac{1/3}{1/4}=\frac{4}{3}.\blacklozenge$$

Задаци 2.2.12.

1. Одредити сљедеће граничне вриједности (неодређености облика $\frac{\infty}{\infty}$):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+5}{5x^2-6x+7}, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^8-2x^6+3}{3x^8+2}.$$

2. Одредити граничне вриједности (неодређености облика $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 5}\frac{3x^2-13x-10}{2x^2-13x+15}, \qquad \lim_{x\to 7}\frac{2x^2-13x-7}{3x^2-19x-14}.$$

3. Наћи граничне вриједности функција:

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x+4}-\frac{24}{x^3+8}\right), \qquad \lim_{x\to +2}\left(\frac{3x^2+x}{(x-2)(x^2+x+1)}-\frac{2}{x-2}\right).$$

$[-\frac{11}{12},\frac{3}{7}]$

4. Израчунати лимесе (неодређености облика $\infty-\infty$):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right), \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right).$$

5. Наћи лимесе

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{1+\cos 4x}, \qquad \lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x},$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\operatorname{tg}x}}{\sin 2x}, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\right).$$

6. Израчунати лимесе

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{a^2+a_1x+b_1}+\sqrt{x^2+a_2x+b_2}+...+\sqrt{x^2+a_nx+b_n}-nx\right),$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}\right).$$

2.3. Посебни лимеси

Дефиниција 2.2.1.

Број L називамо **лијевом граничном вриједношћу** функције f у тачки x_0, ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta = \delta(\varepsilon)$ такво да из $x_0-\delta < x < x_0$ слиједи $|f(x)-L| < \varepsilon$.♦

Лијеву граничну вриједност означавамо са $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $f(x_0-0)$.

Када у претходној дефиницији (2.2.1.) умјесто $x_0-\delta < x < x_0$ ставимо $x_0 < x < x_0-\delta$, за број L кажемо да је **десна гранична вриједност**. Такву обиљежавамо са $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ или са $f(x_0+0)$.

Функција може бити дефинисана у некој тачки када постоје различите лијева и десна њена гранична вриједност у датој тачки. Међутим, ако функција има граничну вриједност, онда има и лијеву и десну и оне су једнаке. И обратно, ако функција у тачки има лијеву и десну граничну вриједност и оне су једнаке (износе L), онда има и граничну вриједност у тој тачки (једнаку L).

Примјер 2.2.2.

Дата је функција $f(x) = [x]$, која реалан број пресликава у **највећи цијели број** не већи од x. Рецимо, $f(-2{,}03) = [-2{,}03] = -2$, $f(-1{,}98) = -1$, $f(1{,}99) = 1$, $f(3{,}01) = 3$.

Другим рјечима, $f : x \to [x] = n \quad (n \le x < n+1,\ n \in \mathbb{Z})$.

За ову функцију, у тачки $x_0 = 1$ постоје лијева и десна гранична вриједност које се међусобно разликују. Наиме, $f(1-0) = 0$, а $f(1+0) = 1$. Међутим, сама функција је дефинисана у тачки $x_0 = 1$ и њена вриједност је једнака њеној десној граничној вриједности, тј. $f(1) = 1$.♦

Функције које немају граничне вриједности у тачки x_0, могу у тој тачки да **дивергирају**, да теже бесконачности.

Ако је функција $f(x)$ дефинисана у области радијуса r, тј. $(0 < |x - x_0| < r$, па ако је у некој околини тачке x_0 (осим можда у x_0) **позитивна**, дакле $f(x) > 0$, и ако је при томе гранична вриједност реципрочне функције нула, односно

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0,$$

тада кажемо да у тачки x_0 функција одређено дивергира ка $+\infty$ и пишемо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.$$

Слично, ако је функција $f(x)$ дефинисана у области радијуса r, па ако је у некој околини тачке x_0 (осим можда у x_0) **негативна**, дакле $f(x) < 0$, и ако је при томе гранична вриједност реципрочне функције нула, тада кажемо да у тачки x_0 функција одређено дивергира ка $-\infty$ и пишемо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$$

То исто се може дефинисати и другачије.

Дефиниција 2.2.3.

Нека је функција f дефинисана у околини тачке x_0, осим можда у самој тачки x_0. Ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta(\varepsilon) > 0$ такво да важи импликација

$$0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon,$$

тада кажемо да функција f тежи $+\infty$ када x тежи x_0 и пишемо $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Слично се дефинише случај $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.♦

Примјери 2.2.4.

За функцију $f(x)=\frac{1}{x}$ у тачки $x_0 = 0$ важи $\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty$, $\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=+\infty$, а за функцију $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ у тачки $x_0 = 1$ важи $\lim_{x\to 1-0}\frac{1+x}{1-x}=+\infty$, $\lim_{x\to 1+0}\frac{1+x}{1-x}=-\infty$.♦

Међутим, када *x* тежи бесконачности функција може и да конвергира. Наиме, ако је функција дефинисана на домену [*r*, +∞), за неки реални број *r*, тада је $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=L$ ако и само ако је $\lim_{t\to\pm 0} f\left(\frac{1}{t}\right)=L$, гдје се у оба лимеса узима истовремено горњи, односно доњи знак.

Дефиниција 2.2.5.

Нека је функција *f* дефинисана у неком интервалу, домену [*r*, +∞). Ако за свако ε > 0 постоји број δ(ε) из истог интервала (домена), такав да важи импликација

$$x > \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon,$$

тада број *L* називамо граничном вриједношћу функције када $x \to +\infty$ и пишемо

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L\,.$$

Слично се дефинише гранична вриједност функције када $x \to -\infty$.♦

Задаци 2.2.6.

1. Одредити параметар λ тако да функција

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\ge 0\\ 2x+\lambda, & x<0\end{cases}$$

има граничну вриједност у тачки $x_0 = 2$.

2. Доказати да је $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$.

3. Одредити $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5-3x^2}{x^2+1}$.

4. У зависности од параметара *a* и *b* дискутовати $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1 x+b_0}$.

5. Наћи $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

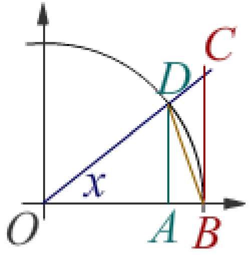
6. Доказати да је $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{(x-x_0)^2} = +\infty$.

2.4. Лимес (sin x)/x

Став 2.4.1. Када је угао *x* у радијанима, тада је

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказ: На сљедећој слици лијево, је тригонометријска кружница (са центром у *O*, полупречника 1) и угао *x* = ∠*BOD*, при чему је O центар круга, а *OB* и *OD* су полупречници. Окомито на крак *OB* угла повучене су нормале *AD* и *BC*, гдје су *A* и *C* пресјечне тачке нормала са крацима (продужетком крака *OD*).



Према томе, дужина *OD* = 1, па је *AD* = sin *x*. Такође *OB* = 1, па је *BC* = tg *x*.

Даље, површине троугла Δ*OBD*, криволинијског троугла $O\widehat{BD}$, и Δ*OBC* су

$$P(\Delta OBD) = \frac{1\cdot AD}{2} = \frac{\sin x}{2},\ P(O\overset{\frown}{BD}) = \frac{x}{2\pi}\cdot(r^2\pi) = \frac{x}{2},\ \text{и}\ P(\Delta OBC) = \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Отуда изводимо, редом

$$P(\Delta OBD) < P(O\overset{\frown}{BD}) < P(\Delta OBC),$$

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|.$$

Након дијељења неједнакости са позитивним бројем |sin *x*|, добијамо

$$1 < \frac{|x|}{|\sin x|} < \frac{1}{|\cos x|},\ \text{тј.}$$

$$1 > \frac{|\sin x|}{|x|} > |\cos x|.$$

Иначе, за све углове у првом квадранту ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) синус и косинус су позитивни бројеви. Како је $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ и $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, према ставу 2.2.7 (енг. *Squeeze theorem*), добијамо $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, што је и требало доказати.♦

Ако је *f*(*x*) непрекидна функција у тачки x_0 и $f(x_0) = 0$, тада када $x \to x_0$ имамо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\big(f(x)\big)}{f(x)}=1.$$

Примјер 2.4.2. Наћи:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}$

Рјешење: 1. Када израчунавамо $f(x)=\frac{\sin 3x}{5x}$ за све мање позитивне, блиске нули вриједности промјенљиве *x*, добијамо резултате све ближе броју 3/5. Рецимо *f*(0,1) = 0,591..., f(0,01) = 0,59991..., f(0,001) = 0,5999991..., па можемо претпоставити да *f*(*x*) $\to$ 0,6 када *x* $\to$ 0.

Међутим, то се може и доказати: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}$ = $\frac{3}{5}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$ = $\frac{3}{5}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{3}{5}$.

2. Ако израчунавамо $f(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}$ за све мање (ближе нули) вриједности промјенљиве *x*, добијамо резултате све ближе броју 1. На примјер: f(0,1) = 0.999983…, f(0,01) = 0.9999999983… .

Међутим, користећи смјену $t = x^2 \to 0$ (када $x \to 0$), доказујемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}$ = $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$.♦

Задаци 2.4.3.

1. Израчунати граничне вриједности:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{x+\frac{\pi}{3}},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\lambda x)}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}.$$

[смјена arg(x) = *t* $\to$ 0]

2. Израчунати:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\lambda x}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\lambda x}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\operatorname{tg}(\sin x))}{x}.$$

3. Наћи лимесе:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}},\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$$

[смјена: $x = \pi/4 + h$, $h \to 0$, па адиционе формуле]

4. Израчунати лимесе:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{2x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{3x}.$$

5. Наћи граничне вриједности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right).$$

6. Наћи:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right),\qquad \lim_{x\to\infty}\arcsin\frac{1-x}{1+x}.$$

2.5. Број *e*

Став 2.5.1. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Број *e* = 2,71828... је ирационална константа, позната као **Ојлеров број** или Неперова константа, односно основа природног логаритма.

Доказ: Прво доказујемо случај када $x \to +\infty$. Користимо дефиницију броја $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Узмимо произвољан реалан број $x \geq 1$, а функција $[x]$ је цијели дио од x, тако да важи неједнакост

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Отуда је

$$\frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]},$$

$$1+\frac{1}{[x]+1} < 1+\frac{1}{x} \leq 1+\frac{1}{[x]},$$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leq \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Како је

$$\lim_{[x]\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{[x]\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\cdot\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}$$

$$= \lim_{[x]\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{[x]\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \cdot \left(1+\frac{1}{[x]}\right) = e\cdot 1 = e,$$

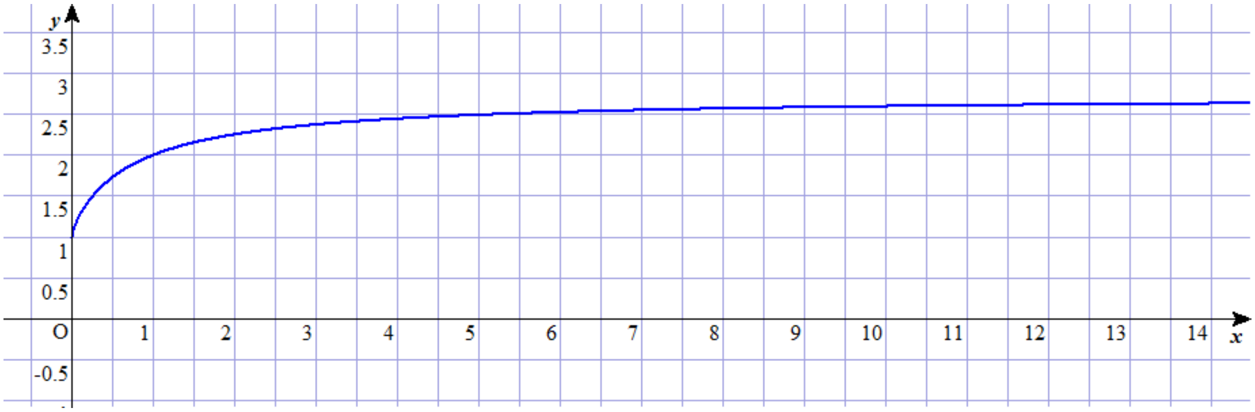
то на основу става 2.2.7. излази да је $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

У случају када $x \to -\infty$, ставимо $y = -x \to +\infty$, па имамо

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Тиме је став доказан.♦



На слици је граф функције $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ гдје се види да ордината (y) брзо, већ након x = 6, узима вриједности веће од 2,5 али је увијек испод вриједности 3 (тачније, испод e = 2,71828...).

Примјери 2.5.2. Наћи граничне вриједности

1. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$; 2. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$; 3. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}$.

Рјешења:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ = $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ = *e*; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ = $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ = $\ln e = 1$; 3. смјена $t = e^x - 1$, $x = \ln(1+t)$, $t \to 0$, па имамо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ = $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}$ = $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}$ = $\frac{1}{1} = 1$.♦

Примјер 2.5.3. Израчунати $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+5}\right)^{3x}$.

Рјешење: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+5}\right)^{3x}$ = $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{(2x+5)-2}{2x+5}\right]^{3x}$ = $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{2x+5}\right)^{3x}$ =

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{2x+5}\right)^{-\frac{2x+5}{2}\cdot\frac{-2}{2x+5}}\right]^{3x}$ = $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{2x+5}\right)^{-\frac{2x+5}{2}}\right]^{-\frac{6x}{2x+5}}$ = $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{6x}{2x+5}}$ = $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{-6}{2+\frac{5}{x}}}$ = e^{-3}.♦

Задаци 2.5.4.

1. Израчунати граничне вриједности

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+2}.$$

2. Израчунати лимесе

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}.$$

[смјена $t = a^x - 1$; пишемо $(1+x)^\alpha = e^{\alpha\ln(1+x)}$]

3. Израчунати

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

4. Израчунати

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-3x+1}\right)^x.$$

5. Израчунати

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}, \qquad \lim_{x\to\infty}x(\sqrt[x]{a}-1),\ a>0.$$

6. Израчунати

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x},\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}},\qquad \lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}.$$

2.6. Асимптоте

Асимптота (грч. *Ασύμπτωτο* – не сјеку се) је права којој се нека крива приближава. Дијелимо их на вертикалне, хоризонталне и косе.

Дата је функција $f:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$

- Права $x = x_0$ је **вертикална асимптота** ако је $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)=\pm\infty$, за бар једно $\pm$;
- Права $y = n$ је **хоризонтална асимптота** ако је $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=n$;
- Права $y = kx + n$, $k\neq 0$, је **коса асимптота** ако је $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-y]=0$, гдје је

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx].$$

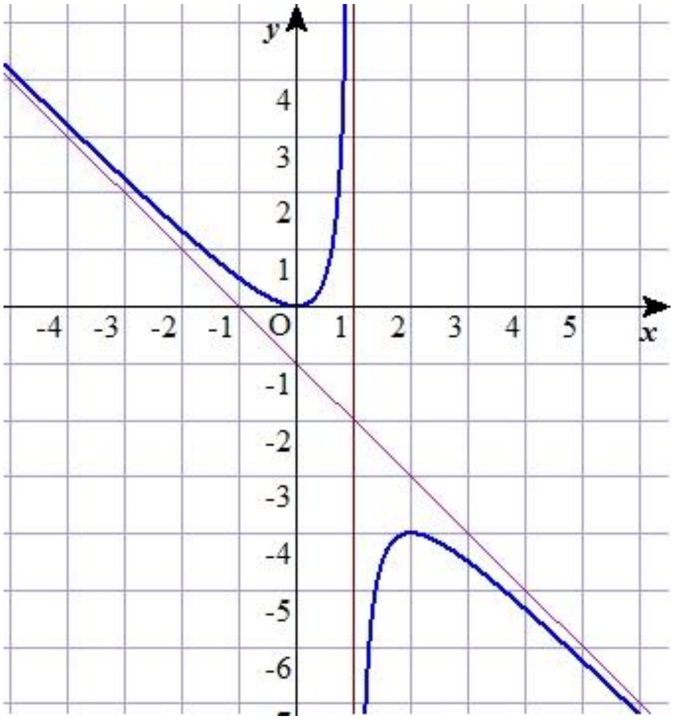
Примјер 2.6.1. Наћи асимптоте функције $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$.

Рјешење. Хоризонтална асимптота била би $y = n$, ако постоји $n=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Међутим, бројник је x пута већи од називника, дати разломак дивергира када x тежи бесконачности, па нема лимеса. Дакле, ова функција нема хоризонталну асимптоту.

Постоји **вертикална** асимптота $x = 1$ дате функције, јер

- $f(x) \to +\infty$ када $x \to 1\text{-}0$,
- $f(x) \to -\infty$ када $x \to 1\text{+}0$.

На слици десно видимо дату криву (плава) и вертикалну праву (црвена), окомиту на апсцису у тачки $x = 1$. Лијева страна те праве је асимптота горе, а са десне стране доле.



Постоји и **коса** асимптота y = -x – 1, јер

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{1x(-x)} = -1$,
- $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^2}{1-x} + x \right) = -1$.

Иста права (лила) је коса асимптота дате функцијеу оба смјера, лијево $x \to -\infty$ и десно $x \to +\infty$.

Задаци 2.6.2. Наћи асимптоте сљедећих функција.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$	**2.** $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$	**3.** $f(x) = \dfrac{3}{2x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-4}$	**5.** $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$	**6.** $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x-4}$
7. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$	**8.** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-1}$	**9.** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x+1}$
10. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$	**11.** $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$	**12.** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{3x^2-2}$
13. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$	**14.** $f(x) = \operatorname{arctg} x$	**15.** $f(x) = \dfrac{2x^2+2x+5}{x^2-3x-4}$.

3. Изводи

Када се аргумент x функције $y = f(x)$ промјени са x_1 на x_2 онда се разлика $\Delta x = x_2 - x_1$ назива **прираштај независно промјенљиве**, а разлика $\Delta y = f(x_1+\Delta x) - f(x_1)$ **прираштај функције**. Количник $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ назива се **средња брзина** промјене функције на интервалу (x_1, x_2). Исти количник представља и **коефицијент сјечице** повучене кроз тачке $T_1(x_1, y_1)$ и $T_2(x_2, y_2)$. У граничном случају, када $\Delta x \to 0$ овај количник представља тангенс угла између x-осе и тангенте дате криве у тачки додира ($x_1 = x_2$). Тада, ако постоји лимес $\Delta x \to 0$, овај количник се назива први **извод функције** у датој тачки и обиљежава се $y' = \frac{dy}{dx}$.

Појам извода је и настао рјешавањем проблема са брзином и тангентама на криву. Њутн (1642-1727) се бавио проблемом брзине, а Лајбниц (1646-1716) тангенте.

3.1. Извод функције

Извод функције једнак је гранчној вриједности количника прираштаја функције и прираштаја независно промјенљиве, када прираштај независно промјенљиве тежи нули. То се може изрећи и прецизније.

Извод функције $y = f(x)$ је функција

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

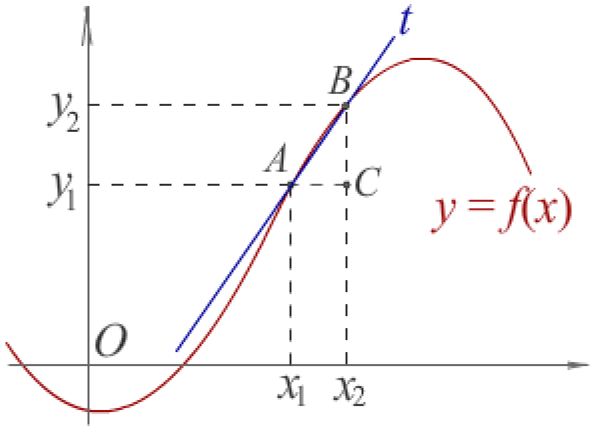
ако наведени лимес постоји.

Геометријски, извод је тангенс угла који формирају x-оса и тангента на дату криву у датој тачки извода. На слици десно је дата функција $y = f(x)$ са прираштајима $\Delta x = x_2 - x_1$ и $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, који су катете правоуглог троугла ABC. Тангенс угла у тјемену A је

$$\operatorname{tg}\angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

То је угао x-осе и сјечице t, тј. праве која садржи тачке A и B.

Када $\Delta x \to 0$ тада се тачке A и B приближавају а сјечица t постаје тангента на дату криву у граничној заједничкој тачки $x_2 = x_1$.



Став 3.1.1. Ако је дата функција константна $f(x) = C$, биће

$$C' = 0,$$

тј. извод константе је нула.

Доказ: имамо $f(x+\Delta x) = C$, па је $f(x+\Delta x) - f(x) = 0$, и $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$. ♦

Геометрисјски, константна функција је права паралелна *x*-оси на висини *C*, а њена тангента је права која се са њом поклапа. Тангенс угла такве тангенте је свугдје нула.

Став 3.1.2. Ако функција *f*(*x*) има извод, има извод и функција *Cf*(*x*), гдје је *C* константа, и биће

$$[Cf(x)]' = Cf'(x).$$

Доказ: $[Cf(x)]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{Cf(x+\Delta x)-Cf(x)}{\Delta x} = C\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = Cf'(x)$.♦

Став 3.1.3. Ако двије функције *u*(*x*) и *v*(*x*) имају изводе и њихов збир има извод, биће

$$[u(x)+v(x)]' = u'(x)+v'(x).$$

Доказ добијамо стављајући у дефиницију извода *f*(*x*) = *u*(*x*) + *v*(*x*) , гдје након сређивања бројника слиједи $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right] = u'(x)+v'(x)$.♦

На исти начин се доказује $[u(x)-v(x)]' = u'(x)-v'(x)$. Посљедње двије формуле пишемо кратко

$$(u\pm v)' = u'\pm v'.$$

Ова правила важе и за више сабирака. Рецимо, (*u* – *v* + *w*)′ = *u*′ – *v*′ + *w*′.

Став 3.1.4. Ако двије функције *u*(*x*) и *v*(*x*) имају изводе и њихов производ има извод, биће

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

Доказ: ставимо *f*(*x*) = *u*(*x*)*v*(*x*), па имамо

$$f(x+\Delta x)-f(x) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x) =$$

$$u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x) =$$

$$[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)].$$

Зато је

$$[u(x)v(x)]' =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$u'(x)v(x)+u(x)v'(x).♦$$

Слична формула важи за више фактора, на примјер (uvw)′ = *u′vw + uv′w + uvw′*. Увијек се један фактор производа замјени својим изводом, па се тако добијени производи саберу.

Правило за извод производа можемо користити и у случају тражења извода имплицитне функције, задате једначином облика $F(x,y) = 0$. На примјер, хиперболу $xy = 1$ непосредно диференцирамо, знајући да је $x' = 1$, добијамо $y + xy' = 0$, затим израчунавамо извод $y' = -\frac{y}{x}$.

Ако у овај извод уврстимо експлицитно $y = \frac{1}{x}$, добијамо извод изражен вриједношћу само апсцисе тачке на хиперболи $y' = -\frac{1}{x^2}$. Једначина тангенте у тачки $T(x_0,y_0)$ ове хиперболе је

$y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$, тј. $x_0 y + x y_0 = 2x_0 y_0$, или с обзиром на једначину хиперболе $x_0 y + x y_0 = 2$.

Став 3.1.5. Ако функција *v*(*x*) имај извод, имаће и $\frac{1}{v(x)}$ извод за свако оно *x* за које је $v(x) \neq 0$:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Доказ: како функција *v*(*x*) има извод, она је непрекидна и постоји интервал око *x* тако да је $v(x) \neq 0$ у том интервалу. Фукција $f(x) = \frac{1}{v(x)}$ је дефинисана за свако *x* из тог интервала. Узмимо Δx тако да је $x + \Delta x$ још увијек у том интервалу, тако да је и $v(x+\Delta x) \neq 0$. Отуда

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{v(x+\Delta x)} - \frac{1}{v(x)} = \frac{v(x) - v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)},$$

па је

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{v(x+\Delta x)v(x)} \cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

А због непрекидности, $\lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x)$, имамо наведени резултат.♦

Став 3.1.6. Ако функције *u*(*x*) и *v*(*x*) имају извод, имаће га и $\frac{u(x)}{v(x)}$ за свако оно *x* за које је $v(x) \neq 0$:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Доказ: имамо редом

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u\cdot\frac{1}{v}\right)' = u'\cdot\frac{1}{v}+u\cdot\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v}-\frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Користимо резултате претходних ставова (нарочито 4. и 5.).♦

Став 3.1.7. Ако је $x=\varphi(y)$, добијено инверзијом из $y=f(x)$, и ако функција $f(x)$ има извод $f_x'(x)\ne 0$, имаће $\varphi(x)$ извод $\varphi_y'(y)$, тако да је:

$$f_x'(x)\cdot\varphi_y'(y)=1.$$

Доказ: ако је $f=f(x)$ монотона (узлазна, или силазна), непрекидна функција. Тада је она бијекција и има инверзну, такође непрекидну функцију $x=\varphi(y)$. Отуда, када прираштај промјенљиве Δx → 0, тада и прираштај функције Δy → 0, али и обрнуто. Прецизније, имамо

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y,\ \ \varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)=\Delta x,$$

а отуда

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x},\ \ \frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y}=\frac{\Delta x}{\Delta y},$$

тј.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y}=1.$$

Претпоставимо ли да функција $f(x)$ има извод $f_x'(x)\ne 0$, тада из посљедње једнакости слиједи да и $\varphi(y)$ има извод, рецимо $\varphi_y'(y)$, такав да вриједи наведени став.♦

Укратко, претходни став важи за узајамно инверзне функције $y=y(x)$ и $x=x(y)$ и слиједи из $y_x'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$ и $x_y'=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{dx}{dy}$, односно из $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$.

На примјер, за функцију $y=x^2$, $x\ge 0$, инверзна је $x=\sqrt{y}$, $y\ge 0$, па имамо

$$y_x'=2x \text{ и } x_y'=\frac{1}{2\sqrt{y}}, \text{ тј.}$$

$$y_x'\cdot x_y'=2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{x}{\sqrt{x^2}}=1,$$

што добијамо након скраћивања двојке и замјене $y = x^2$ у називнику, а затим израчунавања корјена у називнику и скраћивања *x*-а.

Други примјер, функције $y = y(x) = e^x$ и $\varphi(y) = \ln y$ су (узајамно) инверзне. Изводи (прве по *x*, друге по *y*) су редом $y'_x = e^x$, $\varphi'_y(y) = \frac{1}{y}$, па је производ извода

$$y'_x \cdot \varphi'_y(y) = e^x \cdot \frac{1}{y} = y \cdot \frac{1}{y} = 1.$$

У другом кораку смо замјенили дату једнакост $e^x = y$.

Став 3.1.8. Ако функција $y = f(g)$ има извод $f'_g(g)$ по *g*, а функција $g = g(x)$ извод $g'_x(x)$ по x, онда и сложена функција $y = f[g(x)]$ има извод по x:

$$\left(f[g(x)]\right)' = f'_g(g) \cdot g'_x(x).$$

Доказ: Ако је $y = f(g)$ и $g = g(x)$, онда је $y = f[g(x)] = F(x)$ сложена функција од *x*. Нека $f(g)$ има извод $f'_g(g)$ по *g*, а $g(x)$ извод $g'_x(x)$ по *x*. Тада су $f(g)$ и $g(x)$ непрекидне функције од *g* односно *x*. Када се *x* промјени за $x + \Delta x$, промјениће се *g* за $\Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)$, а због непрекидности функције $g(x)$, $\Delta g \to 0$ када $\Delta x \to 0$. За дату сложену функцију имамо

$$F(x+\Delta x) - F(x) = f(g+\Delta g) - f(g),$$

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta g} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x},$$

затим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}. \blacklozenge$$

Слично радимо када имамо композицију три, или више функција. На примјер, у случају

$$y = f(v),\ v = v(u),\ u = u(x),$$

извод је

$$y' = f'_v(v) \cdot v'_u(u) \cdot u'_x(x).$$

На примјер, извод $y = (x^2 - x)^\alpha$ је $y' = \alpha(x^2 - x)^{\alpha-1} \cdot (x^2 - x)' = \alpha(2x-1)(x^2 - x)^{\alpha-1}$.

Други примјер, за $y = \ln g(x)$ извод је $y' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$.

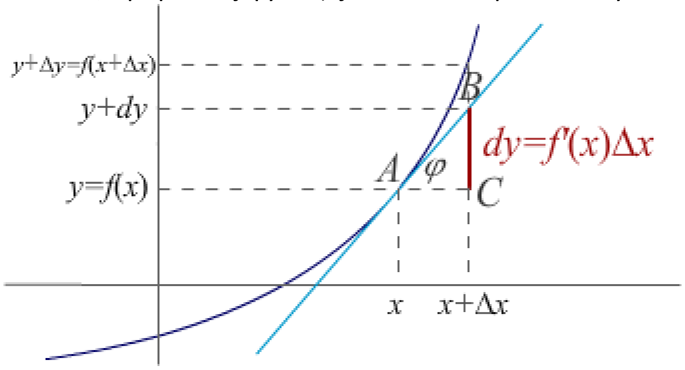
Трећи примјер, ако је $y = \mathrm{tg}(\sin x)$, онда је $y' = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

Примјер 3.1.9. Функција $y = x^3$ у околини, произвољне али фиксне, тачке x_0 има прираштај

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x_0+\Delta x) - y(x_0) = (x_0+\Delta x)^3 - (x_0)^3\\ &= 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\\ &= 3x_0^2\Delta x + (3x_0\Delta x + (\Delta x)^2)\cdot\Delta x\\ &= \alpha\Delta x + \beta(\Delta x)\cdot\Delta x,\end{aligned}$$

гдје је $\alpha = 3x_0^2$ конатанта која не зависи од Δx, док $\beta(\Delta x) = 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \to 0$ када $\Delta x \to 0$.♦

Уопште, прираштај функције се може приказати у облику два сабирка који теже нули, али тако да за количник прираштаја важи



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha + \beta(\Delta x) \to \alpha$, када $\Delta x \to 0$,

гдје је α константа која не зависи од Δx.

Геометријско значење прираштаја је на слици лијево. Оно слиједи из дефиниције тангенса угла у правоуглом троуглу са врховима $A(x, f(x))$, $B(x+\Delta x, f(x)+dy)$, $C(x+\Delta x, f(x))$, јер је tg $\varphi = f'(x)$.

Видјели смо да је функција $y = x^3$ диференцијабилна у околини произвољне тачке x и да је њен диференцијал у тој тачки $dy = 3x^2\Delta x$.

Дефиниција 3.1.10. Функцију $y = f(x)$ називамо **диференцијабилном** у тачки x_0 када прираштај функције Δy, који одговара прираштају промјенљиве Δx у тој тачки, има облик

$$\Delta y = \alpha\Delta x + \beta(\Delta x)\cdot\Delta x,$$

гдје је α константа која не зависи од Δx, а $\lim_{\Delta x\to 0} \beta(\Delta x) = 0$. Величину $\alpha\Delta x$ називамо **диференцијалом** функције f у тачки x_0 и обиљежавамо је са $dy = \alpha\Delta x$.♦

За разлику од деривације која даје коефицијент смјера тангенте, диференцијал је линеарна апроксимација прираштаја функције у околини неке тачке. Наиме, из $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ слиједи

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Наравно, то важи за мале вриједности прираштаја.

Досљедно лијевом и десном лимесу, имамо **лијеви и десни извод** функције.

Дефиниција 3.1.11. Лијеви, односно десни извод функције $y = f(x)$ у тачки x_0 називамо лијеву, односно десну граничну вриједност, уколико она постоји:

$$f'_- = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad f'_+ = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Подразумјева се да је фукција дефинисана у тачки x_0 и у оној околини те тачке која је потребна за тражену граничну вриједност (лијевој, односно десној).

Примјер 3.1.12. Наћи лијеви и десни извод функције $f(x) = |x| - 1$ у нули.

Рјешење: Из дефиниције апсолутне вриједности слиједи

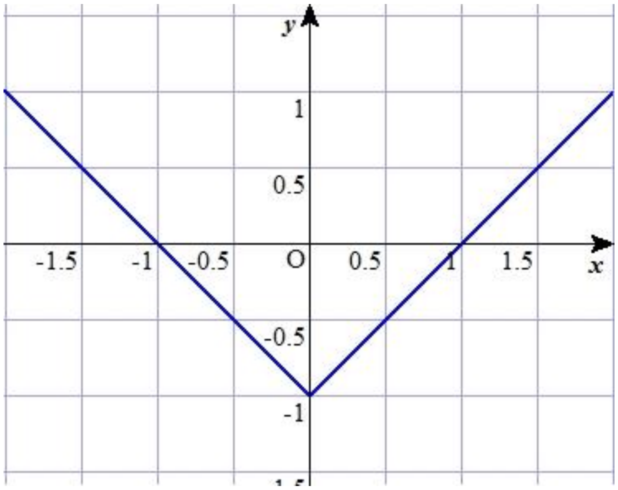
$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \ge 0 \\ -x-1, & x < 0, \end{cases}$$

па за тачку имамо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(|0+\Delta x|-1)-(|0|-1)}{\Delta x} =$$

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x \ge 0 \\ -1, & \Delta x < 0. \end{cases}$$

Зато је $f'_- = -1$ и $f'_+ = 1$. Заиста, лијево, односно десно од $x = 0$ граф има нагиб -1, односно 1, као што се види на слици десно.



Задаци 3.1.13.

1. Ако је разлика двије функције константна, доказати да обе функције имају исти извод.

2. Доказати став 3.1.2 у случају 3.1.1 и 4.

3. Доказати став 3.1.5. у случају 3.1.6. и 1.

4. Ако је $x = \varphi(y)$ добијено инверзијом од $y = f(x)$, онда је $f'_x(x)$ тангенс угла α који тангента заклапа са *x*-осом, а $\varphi'_y(y)$ тангенс угла β који иста тангента заклапа са *y*-осом, мјерено у Декартовом правоуглом систему *Oxy* десне орјентације. Према томе, или је $\alpha + \beta = \pi/2$, или $\alpha + \beta = \pi/2 + \pi$. Одатле излази tg β = ctg α, тј. $f'_x(x)\varphi'_y(y) = 1$.

5. Наћи приближну вриједност $\sqrt{4{,}03}$ помоћу диференцијала.

6. Наћи лијеви и десни извод функције $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \ge 1 \\ x-1, & x < 1 \end{cases}$. Постоји ли извод функције у јединици?

7. Испитати да ли постоји извод функције $y = 3^{|x|}$ у нули.

3.2. Таблица извода

Изводи елементарних (1 – 10.) и трансцедентних (11–18.) функција су дати сљедећом таблицом.

Таблица извода 3.2.1.

1. $C' = 0$, гдје је *C* константа.

2. $x' = 1$.

3. $(x^2)' = 2x$.

4. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. $(a^x)' = a^x \ln a$.

7. $(e^x)' = e^x$.

8. $(\log_b x)' = \dfrac{1}{x \ln b}$.

9. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

10. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

11. $(\sin x)' = \cos x$.

12. $(\cos x)' = -\sin x$.

13. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

14. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

15. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

16. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

17. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

18. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Докази:

4. $(\sqrt{x})' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \dfrac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x}$.

7. За функцију $f(x) = e^x$ имамо $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \cdot \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, а како је

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$ (в. Примјери 2.5.2. примјер 3.), то је $(e^x)' = e^x$.

9. Функција ln *x* је инверзна 7. таблице ($f(x) = e^x$) . Према ставу 3.1.7. имамо $(\ln x)'_x \cdot (e^y)'_y = 1$,

па је $(\ln x)'_x = \dfrac{1}{(e^y)'_y} = \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x}$.

5. За α = 1, 2, 3, … имамо $\left(x^{\alpha}\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}$ =

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x-x)\left((x+\Delta x)^{\alpha-1}+(x+\Delta x)^{\alpha-2}x+(x+\Delta x)^{\alpha-3}x^2+\ldots+x^{\alpha-1}\right)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left((x+\Delta x)^{\alpha-1}+(x+\Delta x)^{\alpha-2}x+(x+\Delta x)^{\alpha-3}x^2+\ldots+x^{\alpha-1}\right) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

У општијем случају, за произвољан реалан експонент α, прво , ако је x > 0, имамо $x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$, па користимо 7. таблице. Ставимо $\alpha\ln x=u$, добићемо сложену функцију $x^{\alpha}=e^{u}$. Према ставу 3.1.8. биће $\left(x^{\alpha}\right)'_x$ = $\left(e^{u}\right)'_u\cdot(\alpha\ln x)'_x$ = $x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\dfrac{1}{x}$ = $\alpha x^{\alpha-1}$, што је и требало показати. Ако функција x^{α} има смисла и за *x* < 0 (на примјер, за цијеле експоненте α), биће $x^{\alpha}=(-1)^{\alpha}(-x)^{\alpha}$, гдје је –*x* сада позитивно. Ставимо ли *u* = -*x*, биће према ставу 3.1.2. и 3.1.8. $x^{\alpha}=(-1)^{\alpha}u^{\alpha}$, па је $\left(x^{\alpha}\right)'_x$ = $(-1)\cdot\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$ = $(-1)^{\alpha}\cdot\alpha(-x)^{\alpha-1}$ = $\alpha(-1)^{\alpha+1}\cdot(-x)^{\alpha-1}$ = $\alpha x^{\alpha-1}$. Дакле, функција x^{α} има извод за свако $x\neq 0$ за које је дефинисана: $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$, а ако је α > 0, онда је за x = 0 извод нула, што је лако провјерити.

Посљедице су: $(x)'=1$, $\left(x^{2}\right)'=2x$, $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^{2}}$, итд.

6. Општа експоненцијална функција a^{x} своди се на експоненцијалну e^{x} формулом $a^{x}=e^{x\ln a}$. Отуда, ако ставимо $u=\ln a$, излази $\left(a^{x}\right)'_x$ = $\left(e^{u}\right)'_u\cdot u'_x$ = $e^{u}\cdot(x\ln a)'_x$ = $e^{x\ln a}\cdot(x)'_x\cdot\ln a$ = $a^{x}\cdot 1\cdot\ln a$, тј. $\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a$.

8. Из $\log_b x=\dfrac{\ln x}{\ln b}$ слиједи $\left(\log_b x\right)'=\dfrac{1}{x\ln b}$.

11. За *f*(*x*) = sin *x* имамо *f*(*x*+Δ*x*) – *f*(*x*) = sin(*x*+Δ*x*) – sin *x* = $2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$, па је

$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ = $\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}$. Због непрекидности функције косинус, и става 2.4.1. (sin *x* / *x* → 1, kada *x* → 0), имамо $(\sin x)'=\cos x$.

12. Из $\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ излази $(\cos x)'\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1)=-\sin x$.

13. $\left(\mathrm{tg}x\right)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$, тј. функција тангенс има извод за свако *x* за које је дефинисана и $\left(\mathrm{tg}x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

14. Добија се слично претходном, из $\mathrm{ctg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

15. Функција $y=\arcsin x$ је инверзна $x=\sin y$. Отуда $\left(\arcsin x\right)'_x \cdot \left(\sin y\right)'_y = 1$, тј. $\left(\arcsin x\right)'_x \cdot \cos y = 1$, па је $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Знак извода једнак је знаку cos *y*.

На сличан начин добијамо табличне изводе 16-18. за остале циклометријске трансцедентне функције.♦

Задаци 3.2.2.

1. За позитиван број α, има ли функција x^α извод у свакој тачки? Извести њене изводе директно из дефиниције за *x* = 0, такође за $\frac{1}{x}$ и $\sqrt[3]{x}$.

2. Има ли функција e^x извод у свакој тачки? Који је угао њене тангенте са апсцисом?

3. Има ли функција $y=\ln x$ извод у свакој тачки? Како се мјења угао њене тангенте?

4. Израчунати изводе (по *x*):

А. $3x^2-2x^3$, **Б.** $5-2x+3x^4$, **В.** $4x^{13}-x^{15}$,
Г. ax^5+bx, **Д.** $3-mx^2+2nx^3$, **Ђ.** $(x-a)^n$
Е. $(bx^2+c)^m$, **Ж.** $\frac{1}{x-\alpha}$, **З.** $\frac{1}{(\alpha x-\beta)^p}$.

5. Диференцирати:

А. $1+5\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x^3}$, **Б.** $(\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x})^4$, **В.** $\left(a\sqrt[3]{x^2}+b\sqrt[4]{x}\right)^5$,
Г. xe^x, **Д.** $x^2\cdot 10^x$, **Ђ.** $\frac{a^x}{x}$,
Е. $\ln\ln x$, **Ж.** $\log_b f(x)$, **З.** $\log(1-x^2)$,
И. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, **Ј.** $\log\frac{\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{x+\beta}}{\sqrt{x+\alpha}-\sqrt{x+\beta}}$, **К.** $\log_b(kx+n)$,
Л. $2e^x-3a^x$, **Љ.** 2^x+3^x, **М.** $xa^x-3x^2e^x$.

6. Доказати да је $1+2x+3x^2+...nx^{n-1}$ = $\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$.

[диференцирати збир геометријског низа $\sum_{k=1}^{n} x^k = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$]

7. Приближну формулу $f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ за x_0 = 0 примјенити на функције $(1+x)^\alpha$, e^x и $\ln(1+x)$.

8. За криву $y=\sin x$ наћи све тачке у којима тангента са x-осом чини угао: 30°, 45°, односно 60°. У којим границама варира угао тангенте и x-осе? Исто питање за криву cos *x*, tg *x*, ctg *x*.

9. У којојим је тачкама: а. синусна, б. косинусна функција паралелна са x-осом?

10. Диференцирати:

А. $\sin 3x$,	**Б.** $\operatorname{tg}(\alpha x+\beta)$,	**В.** $\cos^2 x$,
Г. $\sin^3 x$,	**Д.** $x\cos x$,	**Ђ.** $\dfrac{\sin x}{x}$,
Е. $e^x \sin x$,	**Ж.** $m\sin ax+n\cos bx$,	**З.** $\log\sin x$,
И. $\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$,	**Ј.** $\log_b \cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$,	**К.** $e^{\alpha x}(\sin ax+b)$.

11. Наћи изводе секанса $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ и косеканса $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

12. Приближну формулу $f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ за x_0 = 0 примјенити на функције синус, косинус и тангенс.

13. Проучити ток првог извода функција аркус синус и аркус косинус од тачке (0, -6π) до тачке (0, 6π).

14. Диференцирати:

А. $\arcsin\dfrac{x}{3}$,	**Б.** $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}$,,	**В.** $\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{x^2-1}$.

15. Дефинисати аркус секанс и аркукс косеканс, и наћи изводе тих функција.

16. Логаритмовати, па наћи извод функције

$y=x^x$, $\quad y=x^{\sin x}$, $\quad y=(\sin x)^{\cos x}$.

17. Наћи извод функције *y* = *f*(*x*) имплицитно задате једначином:

$$x^2+5xy+3y^2-5=0.$$

[Функцију $F(x,y)$ која овдје стоји на лијевој страни једнакости (десно је нула) диференцирамо по x, узимајући y као као фунцкију од x чији извод је y'.
Добијамо $2x+5y+(5x+6y)y'=0$, па $y'=-\dfrac{2x+5y}{5x+6y}$]

18. Наћи једначину тангенте елипсе $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

[Узимамо извод са обе стране једначине, добијамо $\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2y}{b^2}y'=0$, тј. $y'=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x}{y}$,
па за једначину тангенте у тачки $T(x_0, y_0)$ елипсе имамо $y-y_0=-\dfrac{b^2x}{a^2y}(x-x_0)$,
односно $a^2yy_0+b^2xx_0=b^2x_0^2+a^2y_0^2$, одакле обзиром на једначину елипсе
добијамо $a^2yy_0+b^2xx_0=a^2b^2$, тј. $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$]

19. Наћи извод y' кружнице, хиперболе, параболе и још двије функције дефинисане имплицитно:

$$x^2+y^2-r^2=0,\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad y^2=2px,$$

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\qquad x^3+y^3-3axy=0.$$

и написати једначину тангенте.

20. Наћи тачке у којима је тангента лемнискате $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ паралелна са x-осом.

21. Наћи извод елипсе дате у параметарском облику $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

[Извод криве дате у параметарском облику $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$ дефинишемо такође помоћу прираштаја $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f_2(t+\Delta t)-f_2(t)}{f_1(t+\Delta t)-f_1(t)}=\dfrac{f_2(t+\Delta t)-f_2(t)}{\Delta t}:\dfrac{f_1(t+\Delta t)-f_1(t)}{\Delta t}$.
Означимо ли изводе функција f_1 и f_2 са $\dot{x}=f_1'(t)$, $\dot{y}=f_2(t)$,
због непрекидности имамо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$, под претпоставком да је $\dot{x}\neq 0$.
Дакле, уопште, ако функције $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$ имају изводе $\dot{x}$ и $\dot{y}$ по t, онда овим једначинама дефинисана функиција y од x
има извод по x дат формулом $y'_x=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$, свугдје гдје је $\dot{x}\neq 0$.
У случају наведене елипсе, биће $y'=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=-\dfrac{b\cos t}{a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$.]

22. Наћи једначину тангенте елипсе када је она дата у параметарском облику (в. 21.).

[У једначини тангенте $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$] треба изразити x, y и y' помоћу параметара.]

23. Наћи извод y по x ако је

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}.$$

3.3. Ток функције

Тражимо нуле и знак функције, нуле и знак првог извода, други извод. Упоредо тражимо и цртамо асимптоте дате функције. Цртамо граф функције.

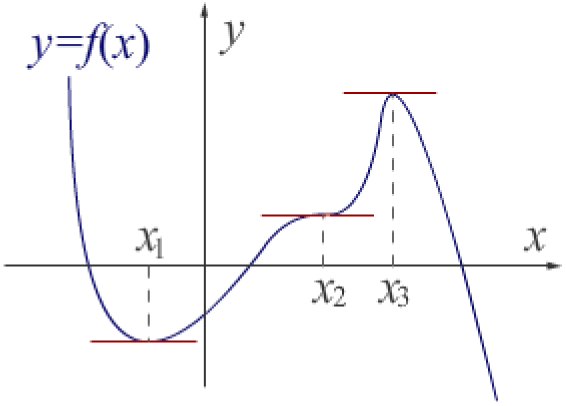
Нуле функције су све тачке функције чија ордината је нула. То су мјеста гдје граф додирује, или сјече x-осу. Када је функција дата експлицитно $y = f(x)$, тада рјешавамо једначину $f(x) = 0$. Када је функција дата имплицитно, тада уврштавамо $y = 0$ и рјешавамо једначину $F(x,y) = 0$.

На примјер, нуле функције $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ су тачке $(\pm1, 0)$, мјеста гдје граф функције сјече x-осу.

Знак функције одређујемо рјешавајући неједначине $y < 0$, односно $y > 0$, дате функције. То су мјеста гдје је граф функције испод, односно изнад апсцисе.

На примјер, функција $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ је испод апсцисе за $-1 < x < 1$, а изнад је за $x \in (-\infty, +\infty)$.

Нуле првог извода су тзв. **стационарне тачке** функције. То су локални минимум, максимум и

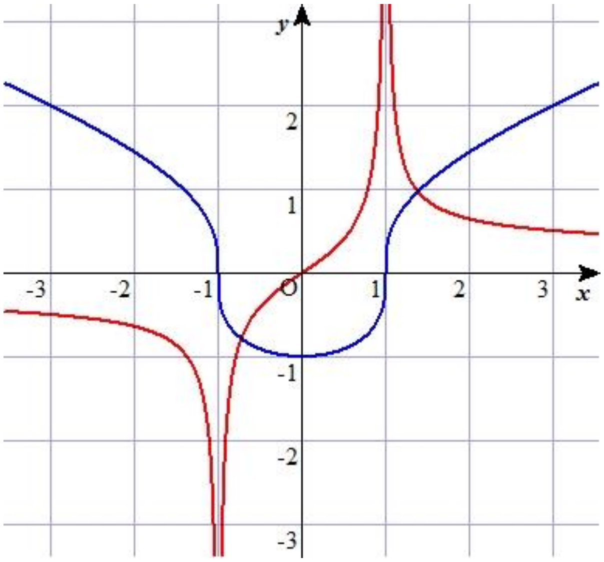


превој фукције. На графу лијево видимо функцију $y = f(x)$ са све три врсте стационарних тачака, са апсцисама: x_1 – минимум, x_2 - превој и x_3 - максимум.

То су мјеста гдје је први извод функције једнак нули, тј. гдје је тангента на граф функције паралелна x-оси.

Као што се види на графу, екстреми функције су у општем случају локални минимум и локални максимум.

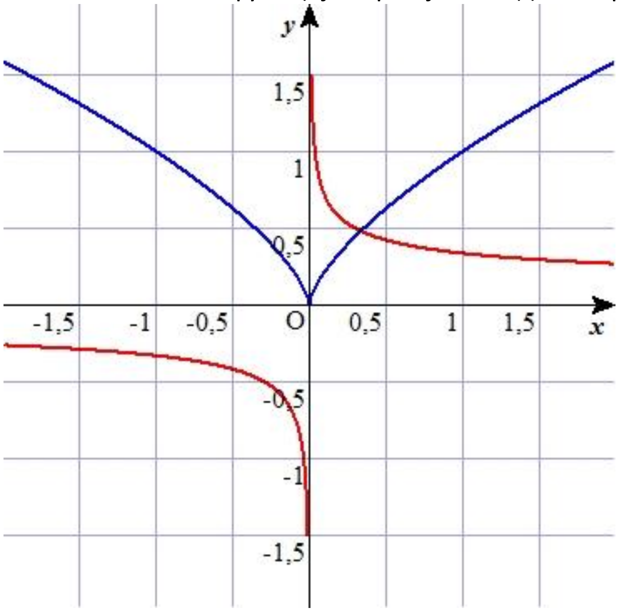
Знак првог извода указује на пад, односно раст функције. То је испитивање монотоности функиције. Када је $y' < 0$ тада је тангенс угла тангенте, у односу на позитиван смјер x-осе, негативан, што значи да је угао туп, а што значи да функција монотоно опада. На претходном графу, то је случај за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_3, +\infty)$. Када је $y' > 0$ тада је угао тангенте оштар, па граф монотоно расте. То имамо за $x \in (x_1, x_3)\backslash\{x_2\}$.



На претходном графу, примјетимо да непрекидна функција пада па расте у околини минимума, а расте па пада у околини максимума. У околини превоја (инфлексије) расте-мирује-расте, или пада-мирује-пада.

На сљедећем графу, плаво је функција $y=\sqrt[3]{x^2-1}$, а њен извод $y=\dfrac{2x}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$ је црвена крива.

Једина стационарна тачка ове функције (плаве) има апсцису *x* = 0 и то је минимум. У тачкама са апсцисом *x* = ±1 драстично се мјења ток извода, али не и ток саме функције. Примјетимо да ова функција нема прекид домена (домен је цијели скуп реалних бројева), али да функција њеног извода има прекид у тачки *x* = 1.



Трећи примјер, домен функције $y=\sqrt[3]{x^2}$ је цијело $\mathbb{R}$, она нема тачака прекида, али њен извод, функција $y'=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$ није дефинисана за *x* = 0. Међутим, у тачки са апсцисом *x* = 0, дата функција има минимум (шиљак на доле), као што се види на графу лијево. Плаво је граф функције, црвено граф извода.

Шиљак, тачка (0, 0) је минимум ове функције. У тој тачки функција нема прекид и нема јединствену косу тангенту. Најбоља тангента била би вертикална права која садржи шиљак, па извод у тачки x = 0 није дефинисан.

Други извод функције је извод њеног извода. Покушајмо сада разумјети понашање другог извода у стационарним тачкама функције.

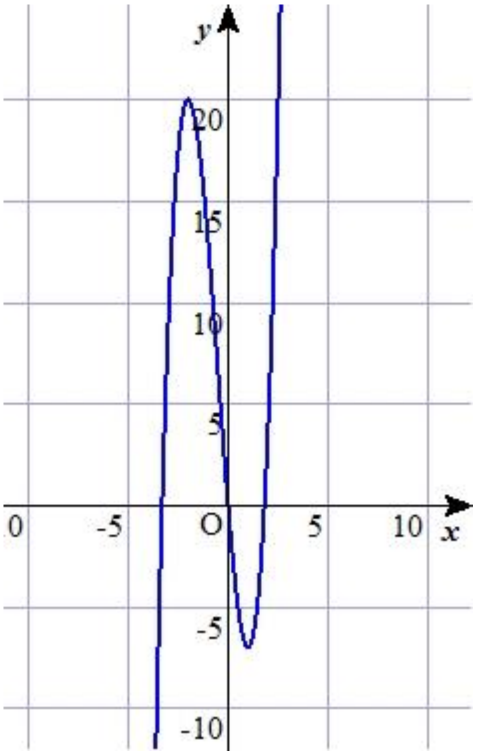
Ако функција у датој тачки има **минимум**, тада она у околини те тачке пада па расте. Њен први извод је редом: негативан, нула, позитиван. Према томе, први извод у околини минимума расте, а извод растуће функције је позитиван. Дакле, други извод функције у тачки минимума је **позитиван**.

Ако функција у датој тачки има **максимум**, тада она расте па пада. Њен извод је позитиван-нула-негативан. Дакле, први извод је опадајућа функција, што значи да је други извод **негативан**.

Ако функције у датој тачки има **превој**, тада она или расте па расте, или пада па пада. Према томе, њен први извод је или позитиван-нула-позитиван, или је негативан-нула-негативан. Редом у првом, односно у другом случају, граф првог извода одозго, односно одоздо додирује *x*-осу, што значи да граф првог извода у тој тачки има минимум, односно максимум. Други извод у тачки превоја је **нула**, и у околини те тачке мјења знак.

Примјер 3.3.1. Испитати ток и нацртати граф функције $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Рјешење: Растављањем на факторе, $f(x) = x(2x^2 + 3x - 12)$ и рјешавањем квадратне једначине, налазимо нуле функције $x = 0$, $\frac{-3 \pm \sqrt{105}}{4}$ ≈ 1,81 и -3,31. То су мјеста гдје граф сјече *x*-осу.



Даље, рјешавањем неједначине, таблично, налазимо

		-3,81		0		1,81	
$x - 1,81$	-		-		-	0	+
x	-		-	0	+		+
$x + 3,81$	-	0	+		+		+
$f(x)$	-		+		-		+

За случај $f(x) < 0$ рјешења су вриједности независне промјенљиве $-\infty < x < -3,31$ или $0 < x < 1,81$ (приближно). То су апсцисе тачака графа функције које су испод *x*-осе. За $f(x) > 0$ рјешења су $-3,8 < x < 0$ или $1,81 < x < +\infty$. То су тачке изнад *x*-осе.

Извод функције је $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$. Нуле првог извода су $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$ и то су стационарне тачке функције. Друге координате ових тачака израчунавамо уврштавањем $y_1 = f(x_1) = f(-2)$, тј. $y_1 = 2\cdot(-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 - 12\cdot(-2) = 20$ и $y_2 = f(x_2) = f(1) = -7$. Према томе, стационарне тачке функције су $M_1(-2, 12)$, $M_2(1, -7)$. Знак извода налазимо рјешавањем неједначина. За $f'(x) < 0$ добијамо $x \in (-2, 1)$, а то је област гдје функција пада. За $f'(x) > 0$ рјешења су $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$, а ту функција пада. Дакле, тачка M_1 је максимум, јер прије ње функција расте, а послије пада, док је тачка M_2 минимум, јер око ње функција пада па расте.

Исти закључак се може добити и на други начин, помоћу другог извода $f''(x) = 12x + 6$, тј. извода првог извода. За прву стационарну тачку функције $M_1(-2, 12)$ имамо $f''(-2) = 12\cdot(-2) + 6 < 0$, што значи да је та тачка максимум. За другу стационарну тачку $M_2(1, -7)$ имамо $f''(1) > 0$, што значи да је она минимум. Резултат се слаже са претходном.

Познато је да цјеле рационалне функције (полиномске) немају асимптота. Граф ове функције је на претходној слици.♦

Поступак **испитивања тока** и цртања графа функције се може описати и овако:

1. Одредити домен функције
2. Наћи пресјеке (нултачке) функције са координатним осама
   a. са *x*-осом за *y* = 0
   b. са *y*-осом за *x* = 0
3. Наћи када је функција изнад (испод) апсцисе
4. Одредити асимптоте функције (ако их има)
5. Одредити интервале монотоности и екстреме функције
6. Одредити тачке инфлексије и интервале конкавности.

Функција је **монотоно растућа** тамо гдје је њен први извод позитиван. Функција је **монотоно опадајућа** тамо гдје је њен први извод негативан.

Функција је **конкавна** (удубљена) у околини (локалног) минимума, дакле тамо гдје је њен други извод негативан. Функција је **конвексна** (испупчена) у околини максимума, тј. тамо гдје је њен други извод негативан. Тачка **инфлексије** (превоја) функције је мјесто гдје њен други извод мјења знак.

Примјер 3.3.2. Испитати ток и нацртати граф функције $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$.

Рјешење:

1. **Домен** функције $D(f)=\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2. **Нултачке** функције:

y = 0 $\Rightarrow \frac{x+2}{x-1}=0 \Rightarrow$ x + 2 = 0 $\Rightarrow$ x = -2 $\Rightarrow$ граф сјече x-осу у тачки (0, -2);

x = 0 $\Rightarrow y=\frac{0+2}{0-1}$ = -2 $\Rightarrow$ граф сјече y-осу у тачки (0, -2).

3. **Знак функције**. Разломак $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ је позитиван ако и само ако је производ $(x+2)(x-1)$ позитиван. Поменути производ је парабола, гранама окренутим горе и нулама x_1 = -2 и x_2 = 1. Према томе, *f*(*x*) < 0 за x $\in$ (-2, 1), и *f*(*x*) > 0 и *x* $\notin$ [-2, 1].

4. **Асимптоте**: вертикална је *x* = 1; хоризонтална је *y* = 1, јер је $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x-1}$ = $\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ = 1. 4.

5. **Монотоност** и локални екстреми:

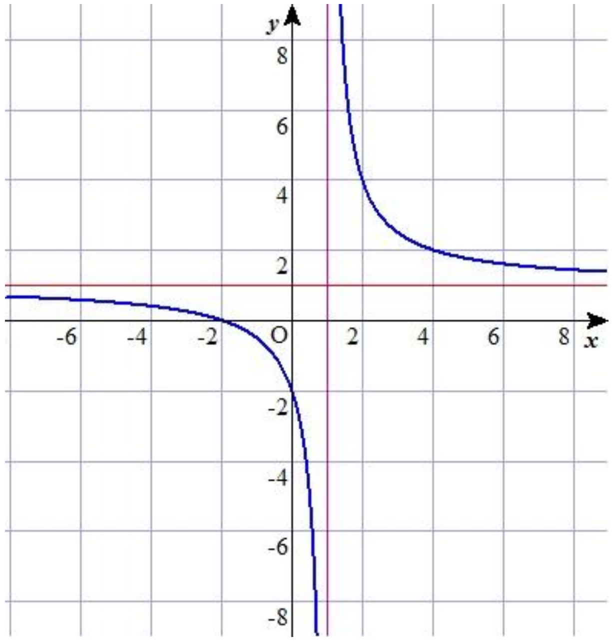
$f'(x)=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$ $\Rightarrow$ ($f'(x)=0$ $\Rightarrow$ -3 = 0 што није тачно) $\Rightarrow$ функција нема стационарних тачака $\Rightarrow$ функција нема екстрема $\Rightarrow$ функција је стално растућа, или падајућа.

Како је ($\forall x\in$D) $f'(x)<0$ $\Rightarrow$ функција *f* је падајућа.

6. **Други извод** функције је $f''(x)=\dfrac{6}{(x-1)^3}$.

Овај извод је негативан за *x* < 1, па је тада функција конвексна. За *x* > 1 је $f''(x)>0$, што значи да је тада функција конкавна.

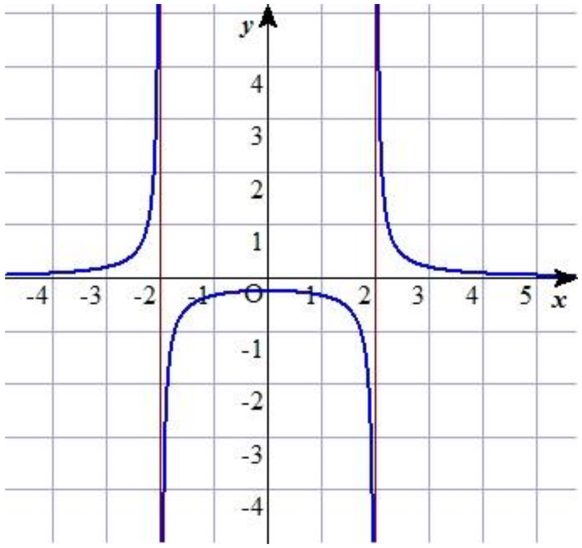
Граф је на слици десно.♦



Подсјетимо се дефинција и геометријских особина парности и непарности функција:

Функција је **парна** акко ($\forall x\in$D) *f*(-*x*) = *f*(*x*)

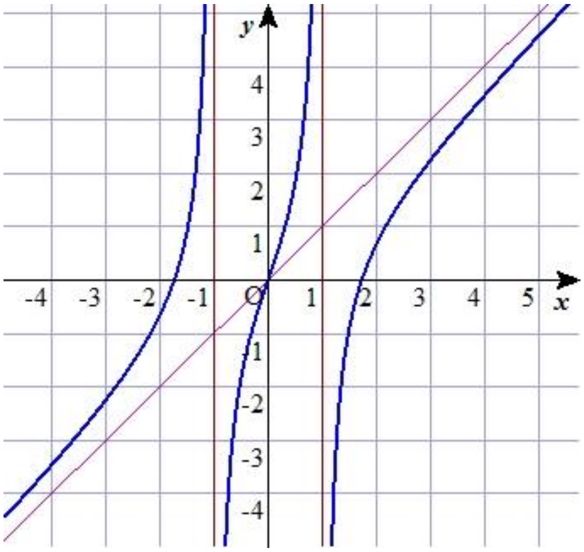
$$f(x)=\frac{1}{x^2-4}$$



Граф је **осно симетричан** у односу на y-осу.

Функција је **непарна** акко ($\forall x\in$D) *f*(-*x*) = *f*(*x*)

$$f(x)=\frac{x^3-3x}{x^2-1}$$



Граф је **централно симетричан** у односу на O.

Задаци 3.3.3.

1. Испитати нуле, знак и монотоност функције

$$y=\frac{x^3}{3}-x^2,\qquad\qquad y=\frac{x^3}{3}+x.$$

2. Наћи екстремне вриједности функције

$$y = x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 3,\qquad x^3 - x^2,$$

$$y = x(x-1)^3,\qquad y = x(x+1)^3,$$

$$y = \sqrt[3]{(x-1)^2},\qquad y = \sqrt[3]{(2x+1)^2}.$$

3. Наћи превојне тачке функције

$$y = x^4 - 3x^3 + 1,\qquad y = (x-1)^4.$$

4. Показати да граф функције $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ има три превојне тачке које леже на правој $x - 4y = 0$.

5. Одредити a и b тако да граф функције $f(x) = \dfrac{ax}{x^2+b}$ има превојну тачку $P(2; 2{,}5)$.

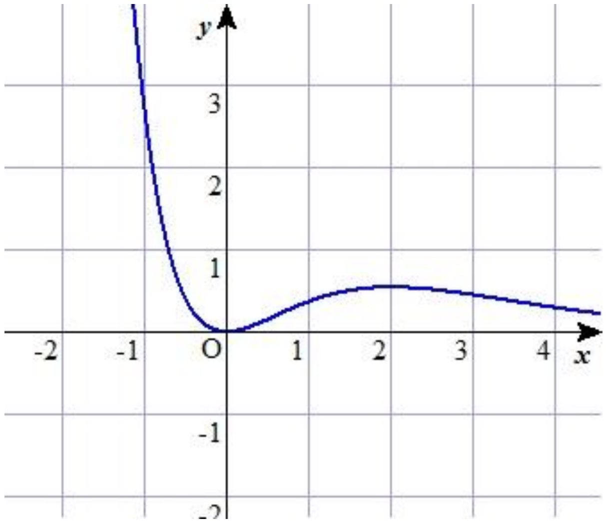
6. Испитати ток и нацртати граф функције

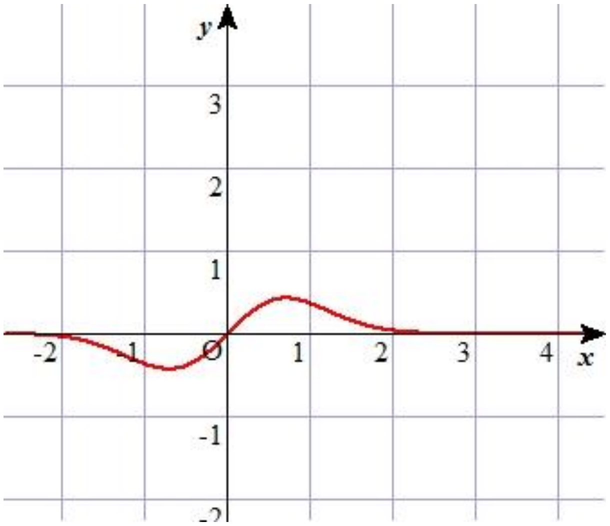
$$y = x^2 - x^4,\qquad y = \frac{x^2}{x-1},$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 2x},\qquad y = e^{\frac{1}{x^2}},$$

$$y = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right),\qquad y = \ln\cos x.$$

7. Испитати ток и објаснити граф функције: а) $f(x) = x^2 e^{-x}$; б) $f(x) = xe^{-x^2}$:



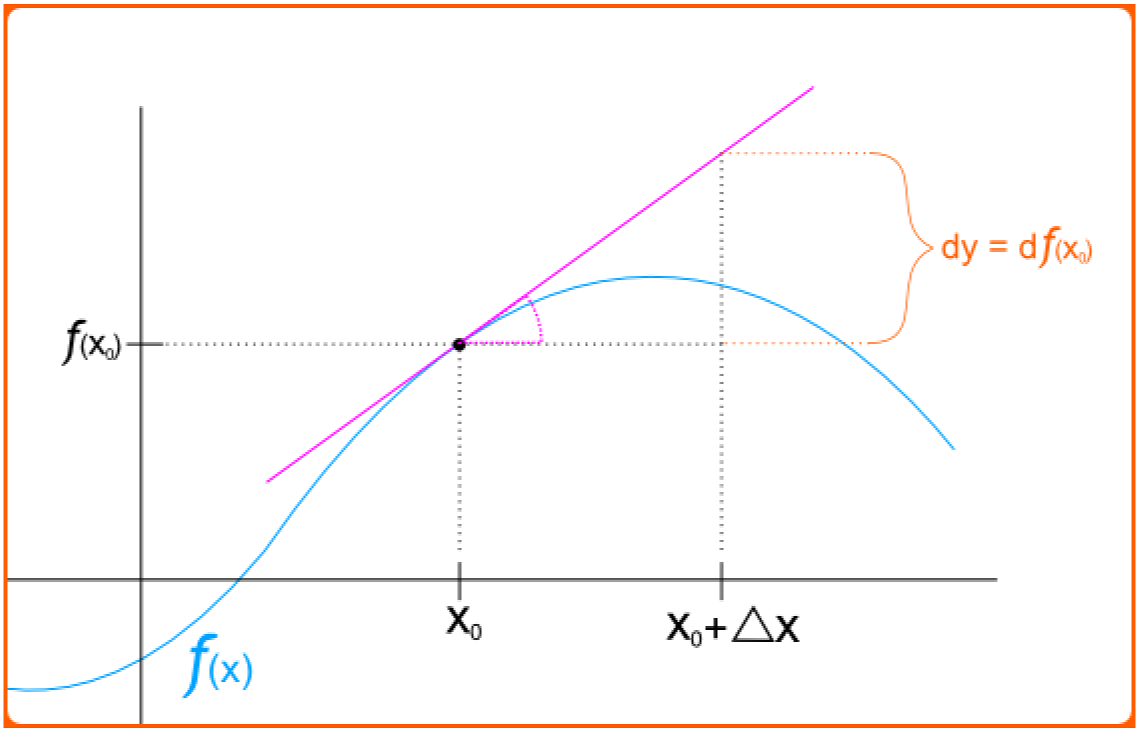


3.4. Диференцијал

Диференцијал је прираштај, промјена вриједнности функције при инфинитезималној промјени независне промјенљиве. Диференцијал dy функције $y = f(x)$ дефинишемо са $dy = f'(x)dx$. То исто према Лајбницовој нотацији можемо писати и овако

$$dy = \frac{dy}{dx}dx \text{, или } df(x) = f'(x)dx .$$

Количник *dy*/*dx*, тј. извод функције *y* = *f*(*x*), није инфинитезимала, мада *dy* и *dx* то јесу.



На слици[4] је диференцијал функције *f*(*x*) у тачки x_0. Када прираштај независне промјенљиве није инфинитезимала, али јесте занемарљиво Δx у датом рачуну, тада нити диференцијал Δy не мора бити инфинитезимала. То је лакше разумјети на сљедећим[5] примјерима апроксимација.

Примјер 3.4.1. Нађимо приближно $\sqrt{50}$ помоћу диференцијала.

Рјешење: Ставимо $y = x^{\frac{1}{2}}$ и $x = 49$. Тада је Δx = 1 и y = 7. Диференцирање даје

$$dy = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x = \frac{1}{2}\cdot 49^{-\frac{1}{2}}\cdot 1.$$

Смјеном добијамо

$$\sqrt{50} = y + \Delta y \approx y + dy = 7 + \frac{1}{2}\cdot 49^{-\frac{1}{2}} = 7 + \frac{1}{14} = \frac{99}{14}.$$

[4] Диференцијал функције: http://en.wikipedia.org/wiki/Differential_of_a_function
[5] Узето из Архив математике: http://archives.math.utk.edu/

Заиста, $\frac{99}{14}\cdot\frac{99}{14}=\frac{9801}{196}\approx 50{,}0051$, што је често задовољавајућа тачност.♦

Примјер 3.4.2. Приближно, помоћу диференцијала израчунати $\sqrt{98}$.

Рјешење: Опет је $y=\sqrt{x}$, $x = 100$, па је $y = 10$, али узимамо $\Delta x = -2$. Диференцирањем налазимо $dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}}\approx\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} = \frac{-2}{2\sqrt{100}}=-\frac{1}{10}$. Уврштавањем слиједи $\sqrt{98}=y+\Delta y\approx y+dy$ = $10+(-1/10)=9{,}9$. И заиста $9{,}9^2 = 98{,}01$ што може бити задовољавајућа тачност.♦

Примјер 3.4.3. Помоћу диференцијала, приближно израчунати $\sqrt[3]{127}$.

Рјешење: Ставимо $y=\sqrt[3]{x}$, x = 125, Δx = 2, y = 5. Диференцирање даје

$$dy=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx\approx\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x = \frac{1}{3}(125)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2,$$

па смјеном добијамо

$$\sqrt[3]{127}=y+dy\approx y+\Delta y = 5+\frac{1}{3}(125)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2=5+\frac{2}{75}.♦$$

Примјер 3.4.4. Диференцијалом приближно израчунати sin 3,14.

Рјешење: Нека је *y* = sin *x*, *x* = π, затим Δ*x* = -0,0015926… и *y* = 0. Диференцирањем налазимо

$$dy=\cos x dx=\cos x\Delta x = (\cos\pi)(-0{,}0015926...),$$

па смјена даје

$$\sin(3{,}14)=y+dy = 0+(\cos\pi)(-0{,}0015926...)=0{,}0015926... .♦$$

Примјер 3.4.5. Приближно израчунати $\mathrm{tg}(0{,}75)$.

Рјешење: *y* = tg *x*, *x* = π/4, па је Δ*x* = 0,035398… и *y* = 1. Затим, из $dy=\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{0{,}035398...}{\cos^2\frac{\pi}{4}}$,

смјеном добијамо $\mathrm{tg}(0{,}75)=y+\Delta y = 1+\frac{0{,}03598...}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=1{,}070796... .♦$

Задаци[6] 3.4.6.

1. Апроксимирати помоћу диференцијала:

a. $\sqrt{17}$, b. $\sqrt{18}$, c. sin 31°.

[A. $\sqrt{17} = f(17) \approx f(16)+f'(16)\Delta x = \sqrt{16} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{16}}\cdot 1 = 4+\frac{1}{8}$;

$\sqrt{18} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{16}}\cdot 2 = 4+\frac{1}{4}$;

$\Delta x = 1°\cdot\frac{2\pi}{360°}$, $\sin 31° = \sin 30° + \cos 30°\cdot\frac{2\pi}{360} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\pi}{360}$]

2. Апроксимирати помоћу диференцијала ln(x+2) и резултат примјенити на ln(e+2).

[Ставити f(x) = ln x па $\Delta x = (x+2)-x = 2$,

затим $f(x+2) \approx f(x)+f'(x)\cdot 2 = \ln x + \frac{2}{x}$.

Посебно је $\ln(e+2) \approx 1+\frac{2}{e}$.]

3. Апроксимирати $\sqrt{101}$ помоћу диференцијала и $\sqrt{100} = 10$.

4. Апроксимирати $\sqrt{x+1}$ помоћу $\sqrt{x}$.

5. Апроксимирати ln(x+1) помоћу ln x.

6. Апроксимирати e^{x+1} помоћу e^{x}.

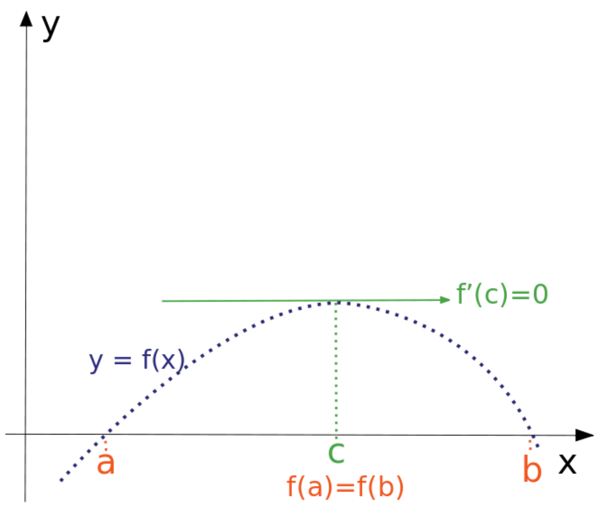
7. Апроксимирати cos(x+1) помоћу cos x.

3.5*. Средња вриједност[7]

Теорема о средњој вриједности (енг. *The Mean Value Theorem – MVT*) је једна од најчешћих тема образовне математичке литературе. То је једна од најважнијих алатки из математичког арсенала, која служи за доказивање многих терорема диференцијалног и нитегралног рачуна, тзв. инфинитезималног рачуна. Најчешће се изводи из свог специјалног случаја, Ролове теореме, назване према француском математичару Мајклу Ролу (*Michel Rolle*, 1652 - 1719), од кога на примјер, имамо и данашње симболе n-тог корјена, рецимо $\sqrt[3]{x}$. Геометријски смисао Ролове теореме је обајшњен у сљедећем примјеру.

Примјер 3.5.1. Ако функција $f(x)$ у унутрашњости интервала (a, b) има свугдје извод и ако је у a непрекидна с десне, а у b непрекидна с лијеве стране, а при томе $f(a) = f(b) = 0$, онда између a и b постоји бар један број c, $a < c < b$, тако да је $f'(c) = 0$.

[6] Garrett P: http://mathinsight.org/linear_approximation_differentials_refresher
[7] Овај дио разматрања иде заједно са 4.4. Теореме диференцијалног рачуна.



Објашњење: Геометријски, ова теорема тврди да под наведеним условима крива $y = f(x)$ има тангенту паралелну са x-осом у тачки $(c, f(c))$, као што се види на слици[8] лијево. Тангента на граф функције $f(x)$ гдје извод исчезава, тј. $f'(x) = 0$, је паралелна x-оси, а таква је и права која спаја крајње тачке $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графа.

Линија која спаја тачке на кривој назива се сјечица (енг. *secant*), а Ролова теорема утврђује егзистенцију тачке у којој је тангента на граф паралелна сјечици, која је хоризонтална. Ако услови под којима је Ролова теорема наведена нису испуњени, она не мора важити. На примјер, ако је у тачки c функције $f(x)$ на датој слици шиљак, функција у тој тачки нема извод.♦

Знамо да се број a за који је $f(a) = 0$ назива корјен функције $f(x)$. Отуда сљедећа формулација Ролове теореме: *Између два корјена функције налази се бар један корјен њеног извода, ако фукција између тих корјена има свугдје извод и ако је за корјене непрекидна*.

Ролова теорема 3.5.2. Ако функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ има следеће особине:

i. Непрекидна је,
ii. Диференцијабилна је на (a, b),
iii. $f(a) = f(b)$,

тада постоји број $c \in (a, b)$, такав да је $f'(c) = 0$.

Доказ: Из неперкидности на затвореном интервалу $[a, b]$ слиједи да функција на том интервалу има минималну и максималну вриједност, редом m и M. Ако је $m = M$, тада је $f(x)$ константна функција, па је њен извод нула, тј. $f'(x) = 0$, у свакој тачки интервала. Ако је $m \neq M$, тада за $c \in (a, b)$ и $f(c) = M$ важи неједнакост $f(x) \leq f(c)$ за свако $x \in [a, b]$. Отуда, за $h > 0$ и $k < 0$ имамо

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{и} \quad \frac{f(c+k)-f(c)}{k} \geq 0\,.$$

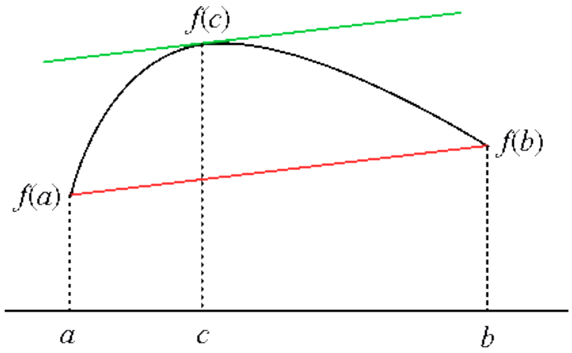
Из прве неједнакости слиједи $f'(c) \leq 0$, а из друге $f'(c) \geq 0$ и због услова (ii.) имамо $f'(c) = 0$.♦

Поопштење Ролове теореме о средњој вриједности је тзв. Лагранжова теорема.

Лагранжова теорема 3.5.3. Нека је $f(x)$ непрекидна функција на затвореном интервалу $[a, b]$ и диференцијабилна на отвореном инервалу (a, b). Тада постоји бар једна тачка са апсцисом $c \in (a, b)$ таква да је

---
[8] Rolle's theorem: http://en.wikipedia.org/wiki/Rolle's_theorem

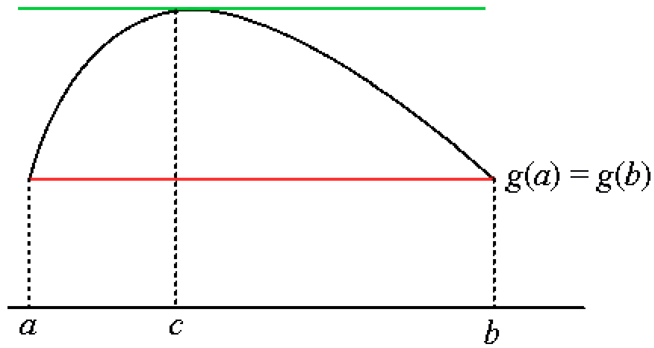
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Теорема о средњој вриједности тврди да постоји тачка у којој је тангента паралелна сјечици (a, $f(a)$) и (b, $f(b)$). Ролова теорема је посебан случај теореме о средњој вриједности, када је испуњен додатни услов $f(a) = f(b)$.

Доказ: Узмимо Ролову теорему. Једначина сјечице, праве кроз тачке (a, $f(a)$) и (b, $f(b)$) дата је једначином праве кроз двије тачке:

$$y(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a).$$



Разлика, функција $g = f - y$ задовољава услове Ролове теореме: $g(a) = f(a) - y(a) = f(b) - y(b) = g(b)$. Према томе, постоји тачка c у (a, b) таква да је $(f - y)'(x) = f'(x) - y'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Услов $(f - y)'(c) = 0$ је исто што и $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.♦

То је стандардни доказ Лагранжове помоћу Ролове теореме. У сљедећем примјеру је доказ Лагранжове теореме геометријским разматрањем тангенти.

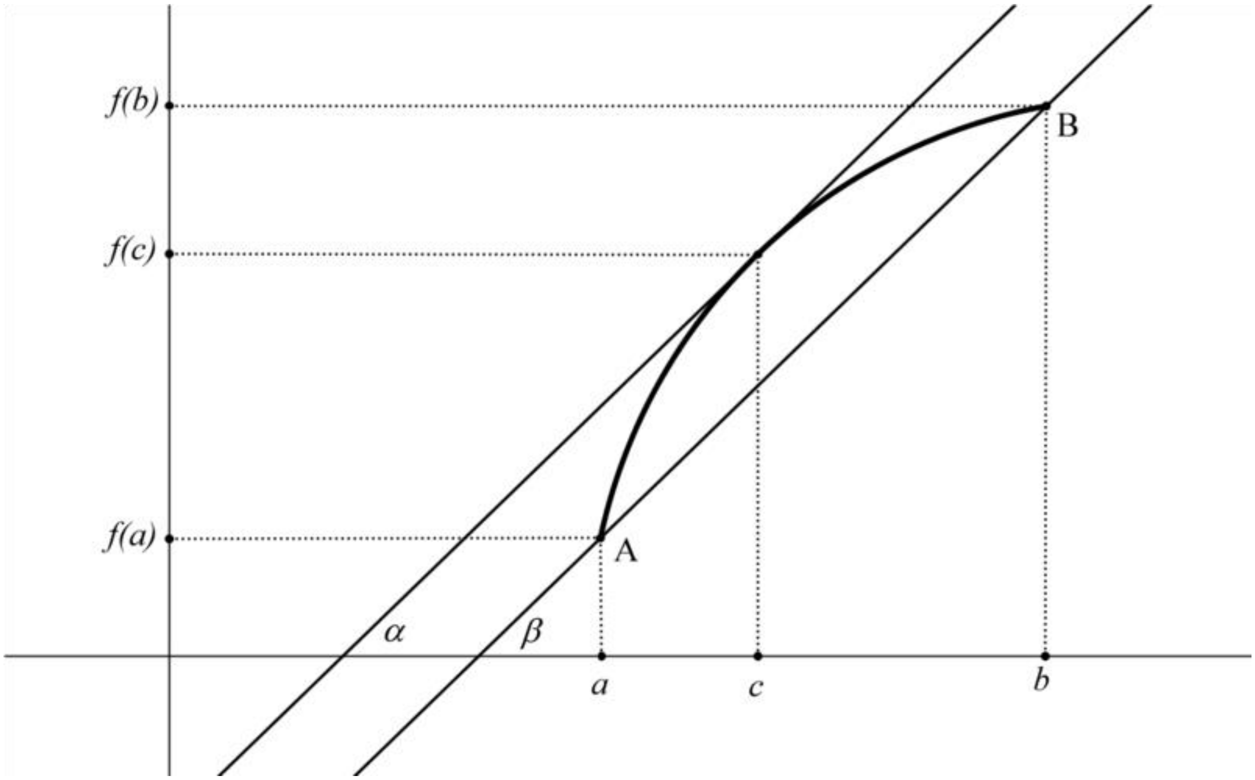
Примјер 3.5.4. Ако функција $f(x)$ има извод у свакој тачки интервала (a, b) апсцисе и ако је у тачки a непрекидна сдесна а у b слијева, онда између a и b постоји бар једно c, тако да је

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c), \quad a < c < b.$$

То је смисао Лагранжове теореме о средњој вриједности.

Да би смо се увјерили у тачност овог тврђења, погледајмо сљедећу слику[9]. Функција $f(x)$ испуњава услове теореме, а у датом интервалу има тачку c, у којој је тангента паралелна са сјечицом AB. Тангенс угла тангенте и апсцисе (α), као што знамо, једнак је изводу функције у датој тачки. Међутим, због паралелности тангенте и сјечице, угао тангенте једнак је углу сјечице (β) и апсцисе.

[9] Лагранжова теорема: http://sr.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B6%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0



Према томе

$$f'(c) = \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\beta = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

а отуда тврђење теореме.♦

Без геометријског разматрања, иста теорема се може доказати на сљедећи начин.

Примјер 3.5.5. Датом функцијом $f(x)$ дефинишемо функцију

$$F(x) = f(x) + \lambda x,$$

гдје је λ константа. Ова функција има извод $F'(x) = f'(x) + \lambda$ свугдје између a и b и непрекидна је у a сдесна, а у b слијева, јер су такве и функције $f(x)$ и x. Бирамо константу λ тако да је $F(a) = F(b)$, односно $f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b$, па је

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Тиме су испуњени услови и за уопштену Ролову теорему, да постоји $c \in (a, b)$ тако да је $F'(c) = 0$, односно $F'(c) + \lambda = 0$, тј.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

одакле излази Лагранжова теорема.♦

Ево још једног једноставног доказа Лагранжова теорема о средњој вриједности.

Примјер 3.5.6. Нека су дате три тачке *A*, *B* и *X* фукције $f(x)$ са апсцисама *a*, *b* и *x*. Израчунајмо растојање $h(x)$ од тачке *X* до праве *AB*.

Производ тражене удаљености $h(x)$ и дужине $|AB|$, тј. размака између тачака *A* и *B*, једнака је двострукој површини $P_\Delta(x)$ троугла ΔABX. Ова површина се једноставно израчунава помоћу детерминанте:

$$2P_\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}.$$

Примјетимо да је $P_\Delta(a) = P_\Delta(b) = 0$. Затим, примјењујемо Ролову теорему. Извод детерминанте једнак је збиру детерминанти добијених из дате узимањем извода једне по једне колоне. У нашем случају је

$$2P'_\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & f(x) & 1 \\ 0 & f(a) & 1 \\ 0 & f(b) & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & f'(x) & 1 \\ a & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} = f(a) - f(b) - f'(x)(a-b).$$

На тај начин, из $P'_\Delta(x) = 0$ непосредно слиједи $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.♦

Сљедећи примјер је провјера претходне теореме на датој функцији у датом интервалу.

Примјер 3.5.7. Провјерити[10] Лагранжову теорему за $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ на интервалу $[0, ½]$.

Овдје је $a = 0$, $b = ½$, а за полином треба наћи такво $c \in (0, ½)$ да је $f'(c) = \dfrac{f(\frac{1}{2}) - f(0)}{\frac{1}{2} - 0}$. Налазимо:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 2x) = 3x^2 - 6x + 2,$$

$$f(a) = f(0) = 0^3 - 3\cdot 0^2 + \cdot 0 = 0,$$

$$f(b) = f(\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2})^3 - 3\cdot(\tfrac{1}{2})^2 + 2\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{3}{8},$$

---

[10] LAGRANGE'S MEAN VALUE THEOREM: http://youtu.be/cTp-VaCU7XU

$$f'(c) = \frac{f(\frac{1}{2}) - f(0)}{\frac{1}{2} - 0} \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 6x + 2 = \frac{3}{4},$$

$$12x^2 - 24x + 5 = 0,$$

$$x_{12} = \frac{24 \pm \sqrt{336}}{24} = 1 \pm \frac{\sqrt{21}}{6},$$

$$c = 1 - \frac{\sqrt{21}}{6} \in (0, \tfrac{1}{2}), \text{ тј. } c \in (a, b). \blacklozenge$$

Већ смо рекли да је Ролова теорема специјални случај Лагранжове. Наиме, ако је $f(a) = f(b)$, према Лагранжовој теореми је $f'(c) = 0$, а то је Ролова теорема.

Са друге стране, ставимо ли $b = a + h$, Лагранжову теорему можемо писати и у облику

$$f(a+h) - f(a) = hf'(c), \text{ тј.}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(c).$$

Број $h = \Delta x$ називамо приращтај, или инкремент независно промјенљиве x, за разлику од инкремента функције $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ у тачки са апсцисом x. Дакле, Лагранжова теорема нам каже да је инкремент функције од $x = a$ до $x = a + h$ производ из инкремента h независно промјенљиве и извода функције узетог за неко c између a и $a + h$, тј. да је успон функције од a до $a + h$ једнак изводу функције за неко c између a и $a + h$.

Како је $a < c < a + h$, можемо писати $c = a + \gamma h$, гдје је $0 < \gamma < 1$, па је

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a + \gamma h).$$

Овај начин представљања Лагранжове теореме нам даје могућност упоређивања инкремента функције са инкрементом независно промјенљиве, тј. даје нам могућност процјене успона функције. Рецимо, ако су m' и M' доња и горња граница за функцију $f'(x)$ у интервалу (a, b), биће

$$m' \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le M'.$$

На примјер, за $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = h$, биће

$$\frac{\sin h}{h} = \cos c, \quad 0 < c < h.$$

За $0 < h < \pi/2$ је $\cos h < \cos c < 1$, па је

$$\cos h < \frac{\sin h}{h} < 1,$$

што смо утврдили и раније, приликом доказа лимеса $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 0$.

То су биле варијације Лагранжове теореме. Даље, разматрамо Кошијеву, тј. проширену теорему средње вриједности.

За двије функције $f(x)$ и $g(x)$ које имају извод између a и b и непрекидне су у a сдесна и у b слијева, биће

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c_1),\ a < c_1 < b,$$

$$g(b) - g(a) = (b-a)g'(c_2),\ a < c_2 < b.$$

Додатна претпоставка је да је за $x \in (a, b)$ извод $g'(x) \neq 0$. Из Ролове теореме тада слиједи и $g(b) - g(a) \neq 0$, па дијељећи наведене једнакости, добијамо

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_1)}{f'(c_2)}.$$

Тако се упоређују инкременти двије различите функције.

На примјер, $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = x^3$, $a = 0$, $b = h$, $0 < h < \pi$. Према наведеном добијамо

$$\frac{h - \sin h}{h^3} = \frac{1 - \cos c_1}{3c_2^2} = \frac{2\sin^2 \frac{c_1}{2}}{3c_2^2} = \frac{1}{6}\left(\frac{\sin \frac{c_1}{2}}{\frac{c_2}{2}}\right)^2.$$

Дакле, процјена количника два инкремента је процјена вриједности разлимка десно, тј. налажење доње и горње границе тог разломка, од чега нема велике користи, јер је једино сигурно да тај разломак није негативан. Међутим, када би било $c_1 = c_2$ онда би се значајно сузиле могућности и прецизност процјене.

Ради тога, формирамо функцију

$$F(x) = [f(b) - f(a)]\cdot g(x) - [g(b) - g(a)]\cdot f(x).$$

Функција F је непрекидна и има изводе на датом интервалу јер су такве и функције f и g:

$$F'(x) = [f(b) - f(a)]\cdot g'(x) - [g(b) - g(a)]\cdot f'(x).$$

Поред тога је

$$F(a) = [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a),$$

$$F(b) = [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b),$$

тј. $F(a) = F(b)$. Према томе, на функцију *F* можемо примјенити Ролову теорему: постоји број *c* између бројева *a* и *b*, тако да је $F'(c) = 0$, односно

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(c) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = 0.$$

Ако је у датом интервалу $x \in (a, b)$ извод $g'(x) \neq 0$, тада због $g(b) - g(a) = (b - a) \cdot g'(c) \neq 0$ можемо извршити дијељење, па добијамо

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad c \in (a, b).$$

Тиме смо показали да постоји јединствен број *c* унутар датог интервала, за бољу процјену горе поменутих количнка два инкремента. Такође, доказали смо Кошијеву теорему средње вриједности (*Cauchy's mean value theorem*). Ево још једног, познатијег доказа те теореме.

Кошијева теорема 3.5.8. Ако функције *f*(*x*) и *g*(*x*) у унутрашњостиинтервала (*a*, *b*) имају изводе и при томе је $g'(x) \neq 0$, и ако су оне у *a* непрекидне сдесна и у *b* слијева, онда постоји број *c* тако да је

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad c \in (a, b).$$

Доказ: Дефинишемо функцију $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$, гдје су *f* и *g* дате функције, а λ неки параметар који бирамо тако да важе услови Ролове теореме. Према томе

$$h(a) = h(b) \iff f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b), \text{ тј.}$$

$$\lambda[g(b) - g(a)] = f(b) - f(a).$$

Зато што је функција *h*(*x*) непрекидна и *h*(*a*) = *h*(*b*), према Роловој теореми, постоји $c \in (a, b)$ за које је $h'(c) = 0$. Отуда

$$0 = h'(c) = f'(c) - \lambda g'(c), \text{ тј.}$$

$$[g(b) - g(a)]f'(c) = [g(b) - g(a)]\lambda g'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c),$$

што је и требало доказати.♦

3.6*. Лопиталово правило

Француски математичар Гијом де Лопитал (*Guillaume François Antoine*, *Marquis de l'Hôpital*, 1661 – 1704.) је у својој књизи Анализа инфинитезимала за разумјевање кривих (*Analyse des infiniment*

petits pour l'intelligence des lignes courbes, 1696.), анонимно објављеној и иначе првој књизи о диференцијалној анализи, навео данас познато Лопиталово правило дајући заслуге Бернулију.

Лопиталово правило важи за функције $f(x)$ и $g(x)$ које обе теже нули, или бесконачности, када независна промјенљива тежи некој датој константи у чијој околини дате функције имају изводе (диференцијабилне су). Тада разломак $f(x)/g(x)$ тежи разломку $f'(x)/g'(x)$, гдје су у бројнику и називнику изводи датих функција.

Уопште, нека су дате двије диференцијабилне функције $f(x)$ и $g(x)$ у околини тачке $x = c$, при чему је $g(x) \neq 0$ у околини дате тачке, и нека је $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Било да је $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$, или је $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty$, тада је $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Једноставније речено, када израчунавамо граничне вриједности разломка за $x \to c$ и имамо неодређеност облика $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ тада важи једнакост

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Лопиталова теорема 6.3.1. Нека су дате функције $f(x)$ и $g(x)$ дефинисане унутар интервала $(x_0 - h, x_0 + k)$ у којем имају изводе свугдје осим можда у тачки x_0 и нека је $g'(x) \neq 0$, али је $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ и $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, тада, ако постоји $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, постоји и $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и биће

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказ: Испуњени су услови за Кошијеву теорему (3.5.7.), да постоји број с такав да је

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad x_0 < c < x.$$

Међутим, како је $f(x_0) = g(x_0) = 0$ то је и

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Када $x \to x_0 + 0$, онда $c \to x_0 + 0$. Претпоставимо ли да постоји $\lim_{x\to x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, биће и $\lim_{x\to x_0+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A$, тј. биће $\lim_{x\to x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Слично, у интервалу $(x_0 - h, x_0)$ добијамо $\lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f'(x)}{f'(x)}$. Тиме је Лопиталова теорема доказана.♦

Ова теорема се може поопштавати, са $x \to 0$ на случајеве када $x \to c$ за прозвољан реалан број c, па и даље, на случајеве $x \to \infty$. У сљедећем ставу је доказ првог случаја, а у примјерима иза је поопштење на случај граничне вриједности за $x \to \infty$.

Став 3.6.1. Дате су непрекидне диференцијабилне функције $f(x)$ и $g(x)$ у тачки c, при чему је $f(c) = g(c)$ и $g'(c) \neq 0$. Тада је

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \lim_{x\to c} \frac{\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)}{\left(\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.♦$$

Примјер 3.6.2. Нека је $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ и $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Ставимо $x = \frac{1}{u}$, одакле $u \to 0$, па је

$$\lim_{u\to 0} f\left(\frac{1}{u}\right) = 0 \text{ и } \lim_{u\to 0} g\left(\frac{1}{u}\right) = 0.$$

Примјењујући Лопиталово правило на количник ових функција, добијамо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{g\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{u\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{u}\right)\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)} = \lim_{u\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)}{g'\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.♦$$

Примјер 3.6.3. Када је $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, тада је $\lim_{x\to c} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$, па на основу Лопиталовог правила добијамо $\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to c} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$, а отуда $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.♦

У сљедећим примјерима су једноставније примјене и задаци.

Примјери 3.6.4.

i. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{4x-1} = \frac{3}{3} = 1$. Такође $\frac{x^2+x-2}{2x^2-x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+1)} \to \frac{3}{3}$.

ii. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{4}=\frac{3}{4}$. Такође $\frac{\sin 3x}{4x}=\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{4}\to\frac{3}{4}$.

iii. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$. Два пута је примјењено Лопиталово правило.

iv. $\lim_{x\to 0}x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$.

v. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$ = $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\frac{x-1}{x}+\ln x}$ = $\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1+x\ln x}$ =

$\lim_{x\to 1}\frac{1+\ln x}{2+\ln x}=\frac{1}{2}$.♦

Задаци 3.6.5. Користећи Лопиталово правило наћи сљедеће граничне вриједности.

А. $\lim_{x\to 1}\frac{5x^4-4x^2-1}{10-x-9x^3}$, Б. $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x-\sin x}$, В. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$,

Г. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$, Д. $\lim_{x\to\infty}xe^x$, Ђ. $\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$.♦

3.7*. Кинематика тачке[11]

Рекли смо да се количник $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ назива се **средња брзина** промјене функције $y=f(x)$ на интервалу (x_1, x_2). При кинематичким[12] разматрањима, кретање се посматра као просторно-временски однос, без улажења у анализу узрока кретања, тј. сила. Зато се **кинематика** сматра геометријом кретања.

Када је $\vec{r}=\vec{r}(t)$ **радијус-вектор** тачке у **тренутку** t, чије кретање посматрамо у односу на неки одабрани пол, тада се вектори **брзине** $\vec{v}$ и **убрзања** $\vec{a}$ кретања дефинишу релацијама:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}\quad\text{и}\quad\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Задатак кинематике је да нађе подесне изразе за ове векторе и утврди односе који међу њима постоје.

Примјер 3.4.1. Кретање је дато системом једначина:

$$x=ct,\ y=\frac{1}{2}at^2,$$

гдје су a и c константе. Одредити путању материјалне тачке, њену брзину и убрзање.

---

[11] Др Божидар С. Милић: ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ТЕОРИЈСКЕ ФИЗИКЕ, I део, Механика система и непрекидних средина, БИГЗ, Београд, 1971.

[12] Кинематика је део класичне механике која проучава кретања механичких објеката, не узимајући у обзир њихову материјалност, као ни узроке који условљавају та кретања.

Рјешење: Путању (трајекторију) налазимо из једначина кретања елиминацијом времена

$$y = \frac{a}{2c^2}x^2.$$

Дакле, путања материјалне тачке је парабола. Декартове компоненте брзине су

$$\dot{x} = c, \quad \dot{y} = at.$$

Елиминацијом времена из компоненти брзине добијамо ходограм брзине, овдје само $\dot{x} = c$. Дакле, ходограф брзине је права линија.

Убрзање има компоненте $\ddot{x} = 0, \ddot{y} = a$. Према томе, убрзање има правац *y*-осе и сталан интензитет.♦

Примјер 3.4.2. Кретање је дато једначинама:

$$x = b\cos kt, \quad y = c\sin kt.$$

Одредити путању, брзину и убрзање. Показати да је интензитет брзине у произвољној тачки путање обрнуто пропорционалан растојању од координатног почетка до тангенте на путању у истој тачки.

Рјешење: Из једначина кретања налазимо $\frac{x}{b} = \cos kt$, $\frac{y}{c}\sin kt$, па квадрирањем и сабирањем налазимо $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$. Дакле, трајекторија је елипса. Даље, диференцирањем по времену налазимо $\dot{x} = -bk\sin kt$, $\ddot{x} = -bk^2\cos kt$, затим $\dot{y} = ck\cos kt$, $\ddot{y} = -ck^2\sin kt$. Елиминисањем времена из компоненти брзине, лако налазимо да је и ходограф брзине елипса. Из једначина за компоненте убрзања видимо да је убрзање колинеарно са вектором положаја: $\ddot{x} = -k^2 x$, $\ddot{y} = -k^2 y$. Да бисмо доказали наведену тврдњу за интензитет брзине, прво налазимо интензитет $\dot{x} = -bk\sin kt = -\frac{bk}{c}y$, $\dot{y} = ck\cos kt = \frac{ck}{b}\dot{x}$, па је $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ = $k\sqrt{\frac{b^2}{c^2}y^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2}$ = $\frac{k}{bc}\sqrt{c^4x^2 + b^4y^2}$. Једначина тангенте на трајекторију, елипсу је $\frac{Xx}{b^2} + \frac{Yy}{c^2} = 1$, гдје су X, Y текуће координате, а x, y кооридинате тачке у којој посматрамо тангенту. Из аналлитичке геометрије знамо да ову једначину треба превести у нормални облик, а затим ставити X = 0, Y = 0, за

налажење растојања координатног почетка од ове праве. Растојање је $d=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{b^4}+\dfrac{y^2}{c^4}}}$ =

$\dfrac{b^2c^2}{\sqrt{c^4x^2+b^4y^2}}$ = $\dfrac{b^2c^2}{d}$. Према томе $v=\dfrac{k}{bc}\cdot\dfrac{b^2c^2}{d}=\dfrac{kbc}{d}$, што је требало показати.♦

Примјер 3.4.3. Кретање је дато једначинама:

$$x=be^{kt},\quad y=ce^{-kt}.$$

Наћи путању (трајекторију), брзину, убрзање. Наћи компоненте убрзања.

Рјешење: Директним множењем (тзв. коначних) једначина кретања елиминишемо вријеме и добијамо једначину трајекторије $xy=bc$. Ако је $bc>0$, то је хипербола у I и III квадранту. Диференцирањем датих једначина налаимо $\dot{x}=bke^{kt}$, $\dot{y}=-cke^{-kt}$. Отуда, опет множењем, добијамо једначину без t, ходограф брзине $\dot{x}\dot{y}=-bck^2$. Ако је $bc>0$, то је опет хипербола али у II и IV квадранту. Брзина је $\vec{v}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}$ = $bke^{kt}\vec{i}-cke^{-kt}\vec{j}$ = $kx\vec{i}+k^2y\vec{j}$.

Да би добили природне компоненте убрзања, подсјетимо се познатих формула из физике:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=v\cdot\overrightarrow{\tau_0},$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau_0}+v\frac{d\overrightarrow{\tau_0}}{dt}=\dot{v}\overrightarrow{\tau_0}+v\frac{d\overrightarrow{\tau_0}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\dot{v}\overrightarrow{\tau_0}+\frac{v^2}{R}\overrightarrow{n_0},$$

гдје су кориштени познати Френеови (*Frénet*) образци

$$\overrightarrow{\tau_0}=\frac{d\vec{r}}{ds},\quad \frac{d\overrightarrow{\tau_0}}{ds}=\frac{n_0}{R}.$$

Отуда пројекције $v_t=v$, $v_n=0$, $v_b=0$, и $a_t=\dot{v}$, $a_n=\dfrac{v^2}{R}$, $a_b=0$. Затим, добијамо изразе за тангенцијалну и нормалну компоненту убрзања

$$a_t^{\,2}=\frac{1}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{a})^2,\quad a_n^{\,2}=\frac{1}{v^2}(\vec{v}\times\vec{a})^2.$$

Из ових израза слиједи

$$v^2=k^2(x^2+y^2),\ \vec{a}\cdot\vec{v}=k^3(x^2-y^2),\ \vec{a}\times\vec{v}=2k^3xy\vec{k},$$

тако да је

$$a_t^{\,2} = \frac{1}{k^2(x^2+y^2)} \cdot k^6(x^2-y^2)^2 = \frac{k^4(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2},$$

$$a_n^{\,2} = \frac{1}{k^2(x^2+y^2)} \cdot 4k^6x^2y^2 = \frac{4k^4x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

Добили смо квадрате природних компонената убрзања у функцији положаја.♦

Примјер 3.4.3. Кретање је дато једначинама:

$$\dot{x} + 2y = -a\sin t$$
$$\dot{y} - 2x = a\cos t,$$

гдје је a константа. Наћи једначину путање, ако је $x = y = 0$ за $t = 0$.

Рјешење: То је систем диференцијалних једначина који рјешавамо тако што, рецимо прву од једначина диференцирамо по времену и добијамо $\ddot{x} + 2\dot{y} = -a\cos t$, па уврстимо $\dot{y}$ из друге, и добијамо $\ddot{x} + 4x = -3a\cos t$. То је нехомогена линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима. Рјешење њеног хомогеног дјела је $x_h = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$, што је лако провјерити израчунавањем извода и уврштавањем. Сада, рјешење нехомогене једначине тражимо у облику $x_p = A\cos t + B\sin t$, примјеном тзв. методе неодређених коефицијената. Убрзо, налазимо $A = -a$, $B = 0$, тако да је коначно

$$x = C_1\cos 2t + C_2\sin 2y - a\cos t.$$

Рјешење за y тражимо из прве једначине датог система $y = -\frac{1}{2}(\dot{x} + a\sin t)$, а затим из претходног рјешења уврштавамо x и добијамо

$$y = C_1\sin 2t - C_2\cos 2t - a\sin t.$$

Константе C_1 и C_2 налазимо из почетних услова, добијамо

$$x = a(\cos 2t - \cos t),\ y = a(\sin 2t - \sin t).$$

То су коначне једначине датог кретања и истовремено једначине путање у параметарском облику. За налажење једначине трајекторије, треба из ових једначина елиминисати вријеме. Ту ћемо елиминацију поједноставити смјеном $x_1 = x + a$, $y_1 = y$, а затим у новом координатном систему пређемо на поларне координате. Послије извјесног рачунања, добијамо једначину трајекторије

$$r = a(2\cos\varphi - 1).$$

То је једначина криве познате под именом Паскалов пуж (конхоида кружнице).♦

4. Интеграл

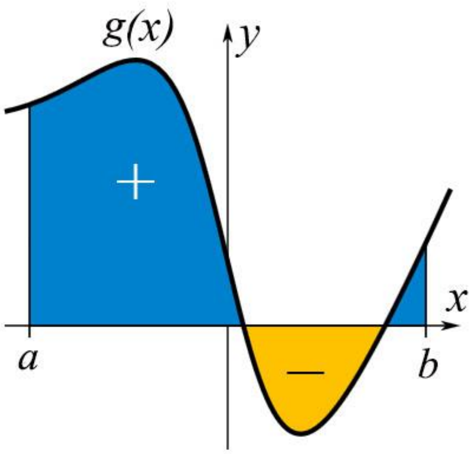
Израчунавање **неодређеног интеграла** је операција супротна диференцирању. Прецизније, ако је извод функције $f(x)$ функција $g(x)$, ако вриједи $f'(x) = g(x)$, онда функцију $f(x)$ називамо **примитивна функција** функције $g(x)$, а операцију добијања примитивне функције називамо **интегрирање**, или интеграција и пишемо

$$\int g(x)dx = f(x) + C,$$

гдје је C произвољна константа. На примјер, извод функције x^2 је $2x$, па је неодређени интеграл

$$\int 2xdx = x^2 + C,$$

јер је за свако $C \in \mathbb{R}$ извод $(x^2 + C)' = 2x$.



Одређени интеграл функције $g(x)$, означавамо

$$\int_a^b g(x)dx,$$

а он представља орјентисану површину у Oxy равни, између графа наведене функције и x-осе.

Показује се да је $\int_a^b g(x)dx = f(b) - f(a)$, гдје је f неодређени интеграл функције g.

4.1. Неодређени интеграл

Дефиниција 4.1.1. Нека је дата функција $f(x)$, дефинисана у неком интервалу (a, b). Сваку функцију $F(x)$ дефинисану у истом интервалу, која има особину $F'(x) = f(x)$, или што је исто $dF(x) = f(x)dx$, за x из датог интервала, називамо **примитивном функцијом** за функцију $f(x)$.♦

Операција налажења примитивне функције назива се интеграција. На основу наведене дефиниције, непосредно на основу таблице извода 3.2.1. дефинишемо сљедећу таблицу основних (неодређених) интеграла.

Таблица 4.1.2.

I. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1, x > 0$.

II. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, $x \neq 0$.

III. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0, a \neq 1)$, а посебно $\int e^x dx = e^x + C$.

IV. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

V. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

VI. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

VII. $\int \frac{dx}{\sin x} = -\text{ctg} + C$, $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

VIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -ar\cos x + C \end{cases}$, -1 < x < 1.

IX. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \text{arctg}\, x + C \\ -\text{arctg}\, x + C \end{cases}$.

Посебан додатак овој таблици су интеграли чији су резултати инверзне (аркус) хиперболне тригонометријске функције.

X. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \text{Arcsh}\, x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$.

XI. $\int \frac{dx}{\pm\sqrt{x^2-1}} = \text{Arcch}\, x + C = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) + C$.

XII. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \text{Arcth}\, x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C$, $|x|$ < 1.

XIII. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \text{Arccth}\, x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C$, $|x|$ > 1.♦

Тачност ове таблице се лако провјерава узимањем извода десне стране једнакости и упоређивањем резултата са подинтегралном функцијом лијево. Са друге стране, помоћу наведене таблице интеграла и сљедећих основних правила интегрирања, могуће је израчунати многе друге неодређене интеграле.

Особине 4.1.3. За све интеграбилне функције важе сљедећа четири правила интегрирања.

1. Константа $c \in \mathbb{R}$ испред подинтегралне функције $f(x)$ се може извући као фактор испред интеграла:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, \quad c = \text{const.}$$

2. Интеграл збира (разлике) функција једнак је збиру (разлици) интеграла:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

3. Метода супституције, смјеном $x = \varphi(t)$:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

4. Метода парцијалне интеграције:

$$\int udv = uv - \int vdu .$$

Доказ: 1. Ако је $F'(x) = f(x)$, тада је $cF'(x) = cf(x)$. 2. Ако је $F_1'(x) = f_1(x)$ и $F_2'(x) = f_2(x)$, тада је $(F_1(x) \pm F_2(x))' = F_1'(x) \pm F_2'(x)$. 3. Из $x = \varphi(t)$ слиједи $\frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi_t'(t)$, па је $f(x)dx = f(\varphi'(t))\varphi_t'dt$. 4. Деривирањем производа двије функције $u = u(x)$ и $v = v(x)$, добијамо $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$, па $\int d(u \cdot v) = u \cdot v = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$, односно $\int udv = uv - \int vdu$.♦

Примјери 4.1.4.

1. $\int 3x^5 dx = 3\int x^5 dx = 3 \cdot \left(\frac{x^{5+1}}{5+1} + C_1 \right) = \frac{x^6}{2} + C$, гдје је C_1 произвољна константа, а $C = 3C_1$.

2. $\int (5x^3 - 3x + \frac{4}{\sqrt{x}})dx = 5\int x^3 dx - 3\int xdx + 4\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{5x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - \frac{4x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$.

3. $\int \sin nxdx$ = [смјена: $nx = t$, па имамо: $x = t/n$, $dx = dt/n$]

$= \int \sin t \cdot \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n}\int \sin tdt = -\frac{1}{n}\cos t + C$ = [враћамо смјену]

$= -\frac{\cos nx}{n} + C$.

4. $\int x\cos xdx = \int xd\sin x = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$.♦

Као што видимо, нема формула за интегрирање производа или количника, па у ситуацијама када је то могуће изразе сводимо на збир и разлику функција.

Примјер 4.1.5.

$$\int \frac{(2\sqrt{x} - 5x\sqrt[3]{x})^3}{\sqrt[5]{x^7}}dx = \int \frac{8\sqrt{x^3} - 3 \cdot 4x \cdot 5x\sqrt[3]{x} + 3 \cdot 2\sqrt{x} \cdot 25x^2\sqrt[3]{x^2} - 125x^3 \cdot x}{\sqrt[5]{x^7}}dx$$

$$= \int \frac{8x^{\frac{3}{2}} - 60x^{2+\frac{1}{3}} + 150x^{2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} - 125x^4}{x^{\frac{7}{5}}}dx$$

$$= 8\int x^{\frac{3}{2}-\frac{7}{5}}dx - 60\int x^{\frac{7}{3}-\frac{7}{5}}dx + 150\int x^{\frac{19}{6}-\frac{7}{5}}dx - 125\int x^{4-\frac{7}{5}}dx$$

$$= \frac{80}{11}x\sqrt[10]{x} - \frac{900}{29}x\sqrt[15]{x^{14}} + \frac{4500}{83}x^2\sqrt[30]{x^{23}} - \frac{625}{18}x^3\sqrt[5]{x^3} + C\,.\blacklozenge$$

Интеграле квадрата синуса или косинуса сводимо на табличне помоћу тригонометријских формула $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ и $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, а затим користимо супституцију.

Примјер 4.1.6.

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x dx\right) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C\,.\blacklozenge$$

Методом супституције рјешавамо веома различите интеграле.

Примјери 4.1.7.

i. $\int \sin\left(\frac{x}{3}-2\right)dx = 3\int \sin\left(\frac{x}{3}-2\right)d\left(\frac{x}{3}-2\right) = -3\cos\left(\frac{x}{3}-2\right) + C\,.$

ii. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(4-\frac{x}{3}\right)^2}} = \int \left(4-\frac{x}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{d\left(4-\frac{x}{3}\right)}{-\frac{1}{3}} = -3\frac{\left(4-\frac{x}{3}\right)^{-\frac{2}{3}-1}}{-\frac{2}{3}-1} + C = \frac{9}{5}\left(4-\frac{x}{3}\right)^{-\frac{5}{3}} + C\,.$

iii. $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}} = \frac{1}{k}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{k}\right)^2}}$ = [смјена: $\frac{x}{k} = t$] = $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin\frac{x}{k} + C\,.\blacklozenge$

Посљедњи случај (iii.) је примјер из низа сличних супституција.

Примјери 4.1.8.

a. $\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\cdot \arcsin\frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} + C = \frac{\sqrt{b}}{b}\arcsin\frac{x\sqrt{ab}}{a} + C\,.$

b. $\int \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{1}{k^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{k}\right)^2}$ = [смјена: $\frac{x}{k} = t$] = $\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k} + C\,.$

c. $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2+x^2}}$ = $\frac{1}{k}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{k}\right)^2}}$ = [смјена: $\frac{x}{k}=t$] = $\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ = $\ln(t+\sqrt{1+t^2})+C_1$

= $\ln\left(\frac{x}{k}+\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\right)+C_1$ = $\ln\frac{x+\sqrt{k^2+x^2}}{k}+C_1$ = $\ln(x+\sqrt{k^2+x^2})-\ln k+C_1$

= $\ln(x+\sqrt{k^2+x^2})+C$.

Следећи интеграл је сличан, мало сложенији случај супституције.

Примјер 4.1.9.

$\int \frac{dx}{k^2-x^2}$ = $\frac{1}{k^2}\int \frac{dx}{1-\left(\frac{x}{k}\right)^2}$ = [смјена: $\frac{x}{k}=t$] = $\frac{1}{k}\int \frac{dt}{1-t^2}$

1. [за $|t|$ < 1] = $\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}$ = $\frac{1}{2k}\ln\frac{k+x}{k-x}+C$,

2. [за $|t|$ > 1] = $\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t-1}$ = $\frac{1}{2k}\ln\frac{x+k}{x-k}+C$. ♦

Када дати квадратни трином ($a\neq 0$) пишемо у канонском облику ax^2+bx+c = $a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$ = $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{2a}$, смјеном $x+\frac{b}{2a}=t$, рјешавање итеграла рационалних функција можемо свести на претходне случајеве.

Примјер 4.1.10. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ = $\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$ = $\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}$ = $\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ = $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C$ =

$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. ♦

Међутим, интеграле неких рационалних функција рјешавамо разлагањем (декомпозицијом) у сабирке који су елементарни разломци.

Примјер 4.1.11. $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$ = $\int \frac{1}{(x+1)(x-2)}dx$ = $\frac{1}{3}\int \frac{(x+1)-(x-2)}{(x+1)(x-2)}dx$ = $\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2}-\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1}$ = $\frac{1}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C$ = $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$.♦

Да би се лако погодила супституција, потребно је добро напамет познавати табличне формуле извода.

Примјер 4.1.12.

$\int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$ = [смјена: $\arcsin x = t$, па је $dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$]

= $\int t^5 dt$ = $\frac{t^6}{6}$ = $\frac{1}{6}(\arcsin x)^6 + C$.♦

Примјер 4.1.13. Израчунати $\int e^x \sin x dx$.

Ставимо $\int e^x \sin x dx$ = $I(x)$. Имамо $I(x) = \int \sin x de^x$ = $e^x \sin x - \int e^x d\sin x$

= $e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$

= $e^x \sin x - \int \cos x de^x$

= $e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x d\cos x)$

= $e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$.

Дакле, имамо $I(x) = e^x \sin x - e^x \cos x - I(x)$, тј. $2I(x) = e^x(\sin x - \cos x)$, односно $I(x) = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$.♦

Задаци 4.1.14. Израчунавање неодређених интеграла.

1. Интегралити полиноме

$$\int (3x^4 - 2x^3 + x - 2)dx, \qquad \int\left(-\frac{2x^3}{5} + x^2 - 3x + \frac{1}{2}\right)dx.$$

2. Наћи интеграле тринома

$$\int\left(-\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx,\qquad \int\left(2\sqrt[3]{x^5}-\frac{3}{x}+\frac{4}{\sqrt{x^3}}\right)dx.$$

3. Свођењем на збир интегрирати изразе

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}}\left(2\sqrt[3]{x}-3\right)^3dx,\qquad \int\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(-3\sqrt{x}+2\right)^3dx.$$

4. Методом супституције наћи

$$\int(ax+b)^{17}dx,\qquad \int e^{\alpha x-\beta}dx,$$

$$\int\sin(-kx+n)dx,\qquad \int\sqrt[n]{(px+q)^m}\,dx.$$

5. Израчунати интеграле тригонометријских функција

$$\int\cos^4 x dx,\qquad \int\sin^4 x dx,$$

$$\int\operatorname{tg}^4 x dx,\qquad \int\operatorname{ctg}^4 x dx.$$

6. Израчунати

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-3}},\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}},$$

$$\int\frac{dx}{5+3x^2}\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}.$$

7. Методом супституције наћи интеграле тригонометријских израза

$$\int\operatorname{tg}x dx,\qquad \int\operatorname{ctg}x dx,$$

$$\int\frac{\cos^7 x}{\sqrt[3]{\sin^5 x}}dx,\qquad \int\frac{\sin^7 x}{3\sqrt{\cos^5}}dx.$$

8. Рјешити методом супституције

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \int\frac{xdx}{1+x^2},$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{2+3x^2}},\qquad \int\frac{xdx}{\sqrt[3]{3-2x^2}}.$$

9. Израчунати интеграле

$$\int\frac{dx}{x^2-x+1},\qquad \int\frac{dx}{15-6x-9x^2},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}},\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x-2}}.$$

10. Израчунати

$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}, \qquad \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6},$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2 + 5x + 6} dx, \qquad \int \frac{2x-1}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

10. Израчунати методом парцијалне интеграције

$$\int x^2 e^x dx, \qquad \int \ln x dx,$$

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x dx, \qquad \int e^x \cos x dx.$$

4.2*. Диференцијалне једначине[13]

Укратко, видјећемо само неке диференцијалне једначине првог и вишег реда, како се формирају, провјеравају и, у наједноставнијим случајевима, како се рјешавају. Рјешаваћемо хомогену и општу линеарну диференцијалну једначину првог реда.

Дефиниција 4.2.1. Нека је F дата функција која пресликава неки подскуп из $\mathbb{R}^3$ у $\mathbb{R}$. Једначина

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

гдје је y : [a, b] → R непозната диференцијабилна функција, назива се **диференцијална једначина првог реда**, ако у њој ефективно учествује извод $y'(x)$. ♦

Примјер 4.2.2. Диференцијална једначина првог реда је $(y'(x))^2 + y(x)^2 = 1$.

Лако је провјерити да је функција $y_1(x) = \cos x$ њено **партикуларно** (посебно) рјешење, јер уврштена, идентички задовољава дату једначину. Међутим, њено **опште** рјешење је $y(x) = \sin(x + C)$, јер се елиминацијом константе C из дате једначине и $y'(x) = \cos(x + C)$ добија само поменута једначина. Са друге стране, дата једначина има и рјешења y = ±1, која нису садржана у општем рјешењу, а називају се **сингуларна** рјешења. ♦

Дефиниција 4.2.3. Нека је F дата функција n+1 промјенљивих. Диференцијална **једначина реда *n*** је једначина $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx}$, $k = 1, \ldots, n$. Подразумјева се да изводи функције F по свакој од n+1 промјенљивих нису идентички једнаки нули. ♦

Примјери 4.2.3.

- Једначина $y'' - 2y' = 3$ је линеарна диференцијална једначина другог реда.
- Једначина $y' + y''y''' = x - y$ је диференцијална једначина трећег реда. ♦

---

[13] Diferencijalne jednadžbe: http://youtu.be/2VOMDvqpxWw
What is a differential equation: http://youtu.be/-_POEWfygmU

Примјери 4.2.4. Формирајмо диференцијалну једначину фамилија кружница и елипса:

$$x^2+y^2+C_1x+C_2y+C_3=0, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Рјешење: (Кружница) Елиминишимо константе C_1, C_2, C_3 из дате, затим из изводне $2x+2yy'+C_1+C_2y'=0$, и још једном изводне једнакости $2+2(y')^2+2yy''+C_2y''=0$. Из треће једнакости извлачимо константу C_2 експлицитно, и диференцирамо по x. Добијамо $\left(\frac{1+(y')^2+yy''}{y''}\right)'=0$, и након сређивања добијамо $3y'(y'')^2-(1+(y')^2)y''=0$. То је диференцијална једначина кружнице.

(Елипса) Диференцирањем једначине елипсе добијамо $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=-\frac{yy'}{x}$. Множимо дату једначину са b^2 и смјењујемо добијени $\frac{b^2}{a^2}$, добијамо $-xyy'+y'^2=b^2$. Затим диференцирамо и средимо па добијамо $yy'-xy'^2-xyy''=0$.♦

Провјеравање рјешења диференцијалних једначина је (очекивано) лакше од њиховог формирања или рјешавања.

Примјери 4.2.5. Провјерити.

i. $y(x)=\frac{3}{4}+\frac{c}{x^2}$ је опште рјешење једначине $2xy'+4y=3$.

ii. Показати да $y(x)=x^{-\frac{3}{2}}$ рјешава једначину $4x^2y''+12xy'+3y=0$, за $x > 0$.

iii. Диференцијална једначина $(1-e^y)y'=1$ има (опште) рјешење $y-e^y=x+C$.♦

Неке диференцијалне једначине се могу елементарно рјешавати. Када се рјешење може записати помоћу коначно много једнакости у којима учествују само (коначно много) елементарних функција, тада кажемо да је једначина експлицитно рјешена.

Најједноставнија диференцијална једначина је облика $y'=f(x)$, гдје је f непрекидна функција. Њено рјешење налазимо директном интеграцијом $y=\int f(x)dx+C$.

Мало општија диференцијална једначина је облика $f(x)dx+g(y)dy=0$, због чега кажемо да има **раздвојене промјењљиве**. Такву је једначину, такође, могуће непосредно интегралити. Добијамо $\int f(x)dx+\int g(y)dy=C$. Дакле, добијамо њено рјешење у имплицитном облику $F(x)+G(y)=C$, гдје је C произвољна константа.

Примјери 4.2.6. Наћи рјешења диференцијалних једначина:

i. $\frac{dy}{dx} = 6x^2 y$, ii. $y' = \frac{x^2 + 2x + 3}{3y - 4}$, iii. $y' = e^{-y}(2x - 4)$.

Рјешења: i. $\frac{dy}{y} = 5x^2 dx$, затим $\int \frac{1}{y} dy = 5\int x^2 dx$, па $\ln y = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + C_1$, те $y = Ce^{2x^3}$, гдје је $C = e^{C_1}$, а C_1 је произвољна константа. ii. $(3y - 4)dy = (x^2 + 2x + 3)dx$, затим интегрирамо и отуда имплицитно рјешење $3\frac{y^2}{2} - 4y = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C$. Експлицитно рјешење добијамо рјешавањем квадратне једначине по y, које је реално само за неке (произвољне) константе C. iii. $y(x) = \ln(x^2 - 4x + C)$, за $C \le 4$.♦

Кошијев задатак за диференцијалну једначину првог реда је тражење оног рјешења диференцијалне једначине које задовољава додатни услов:

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0.$$

Такво рјешење се назива **партикуларно рјешење**.

Примјер 4.2.7. Одредитити партикуларно рјешење једначине уз дати услов

$$(1 + e^x)yy' = e^x,\ y(0) = 1.$$

Рјешење: $ydy = \frac{e^x dx}{1 + e^x}$, отуда $\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C$, па услов даје $\frac{1^2}{2} = \ln(1 + e^0) + C$, тј. $C = \frac{1}{2} - \ln 2 \approx$ -0,193. Партикуларно рјешење је $y = \sqrt{\ln \frac{e}{4}(1 + e^x)^2}$.♦

Хомогена диференцијална једначина је облика $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Рјешавамо је смјеном $y = ux$, гдје је u нова промјенљива. Смјеном $y' = u'x + u$ слиједи $u'x + u = f(u)$, па ако је $f(u) \ne u$ и $x \ne 0$, имамо диференцијалну једначину са раздвојеним промјенљивим $\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$, која се непосредно интегрира у $\ln|x| = \int \frac{du}{f(u) - u} + C$. Отуда $x = C_1 e^{\int \frac{du}{f(u)-u}}$, гдје је $C_1 = \pm e^C$ произвољна константа.

Примјер 4.2.8. **а**) Рјешити хомогену једначину $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 5y}{2x + y}$.

б) Диференцијалну једначину $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$ свести на хомогену.

Рјешење: **а**) Смјеном $z=\dfrac{y}{x}$ добијамо $xz'+z=\dfrac{-2x+5xz}{2x+xz}$ = $\dfrac{-2+5z}{2+z}$, одакле $z'=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{-2+5z}{2+z}-z\right)$. Имамо раздвојене варијабле, па налазимо сва имплицитна рјешења:

$$\begin{cases} -4\ln|z-2|+3\ln|z-1|=\ln|x|+C \\ z=1 \\ z=2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -4\ln|y-2x|+3\ln|y-x|=C \\ y=x \\ y=2x. \end{cases}$$

Ово имплицитно рјешење се може написати и у облику $(y-x)^3=C_1(y-x)^4$.

б) Разликујемо два случаја:

1. Ако је $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix}\neq 0$, смјеном $y=u+\alpha$, $x=v+\beta$, гдје су α и β константе, добијамо једначину $\dfrac{du}{dv}=f\left(\dfrac{av+bu+a\beta+b\alpha+c}{Av+Bu+A\beta+B\alpha+C}\right)$. Због претпоставке, систем линеарних једначина $\begin{cases} a\beta+b\alpha+c=0 \\ A\beta+B\alpha+C=0 \end{cases}$ има рјешење по α и β, па дата једначина постаје $\dfrac{du}{dv}=f\left(\dfrac{av+bu}{Av+Bu}\right)$ = $f\left(\dfrac{a+b\frac{u}{v}}{A+B\frac{u}{v}}\right)$, а то је је наведена хомогена једначина.

2. Ако је $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix}=0$, тада је $A=ka$, $B=kb$, гдје је k константа. Смјеном $u=ax+by$ дата једначина постаје $u'=a+bf\left(\dfrac{u+c}{ku+C}\right)$, тј. диференцијална једначина са раздвојеним промјенљивим.♦

Линеарна диференцијална једначина је облика $y'+f(x)y=g(x)$, гдје су f и g дате функције. Ако је g идентички једнако нули, једначина се назива **хомогена** линеарна диференцијална једначина.

Опште рјешење хомогене једначине $y'+f(x)y=0$, за $y\neq 0$, налазимо интегрирањем $\dfrac{dy}{y}=-f(x)dx$, тј. из $\ln|y|=-\int f(x)dx+C_1$, одакле излази $y=C_2e^{-\int f(x)dx}$, гдје је $C_2=\pm e^{C_1}$ произвољна константа. Међутим, и за $C_2=0$ добијамо (сингуларно) рјешење $y=0$.

Опште рјешење нехомогене једначине налазимо помоћу претходног, општег рјешења хомогене. Претпостављамо да C_2 није константа, већ непозната функција од x. Полазећи од

$y = C(x)e^{-\int f(x)dx}$, после диференцирања добијамо $y' = C'(x)e^{-\int f(x)dx} - C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx}$. Даље, замјеном добијамо $C'(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x)$, тј. $C'(x) = g(x)e^{\int f(x)dx}$, одакле $C(x) = C_3 + \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx$. Дакле, опште рјешење наведене нехомогене линеарне диференцијалне једначине је $y = e^{-\int f(x)dx}\left(C_3 + \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right)$, гдје је C_3 произвољна константа.

Примјетимо да је опште рјешење (опште) линеарне дференцијалне једначине линеарна функција интеграционе константе $y = C_3F_1 + F_2$.

Примјер 4.2.9. Рјешити $y' + \frac{1}{x}y = x$.

Рјешење: $y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(C + \int xe^{\int \frac{1}{x}dx}dx\right)$, тј. $y = \frac{1}{x}\left(C + \frac{x^3}{3}\right)$ = $\frac{C}{x} + \frac{x^3}{3}$, гдје је C произвољна константа.♦

Задаци 4.2.10.

1. Елиминисати константе из једнакости $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

[$y'' + y' - 2y = 0$]

2. Наћи опште рјешење $y' = -5y$ и посебно за почетну вриједност $y(0) = 10$.

3. Наћи опште и партикуларно рјешење једначине $xy' = y^2 - 1$, за $y(1) = 2$.

[$y = \frac{1+Cx^2}{1-Cx^2}$, $C = \frac{1}{3}$]

4. Рјешити диф. једначину $y^2y' = 1 + y^2$.

[$y - \operatorname{arctg} y = x + C$]

5. Наћи рјешење раздвајањем промјенљивих $y' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$, и посебно за $y(0) = 1$.

[из $\frac{dy}{1+y^2} = (1+x^2)dx$ добијамо $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{x^3}{3} + C\right)$ и $C = \frac{\pi}{4}$]

6. Наћи рјешење $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \cos^2 x$, и посебно за $y(0) = 2$.

[$y=(C+\sin x)\cdot\cos x$, и C = 2]

7. Рјешити $y'=\dfrac{2xy+2}{1+x^2}$, и посебно за $y(0)$ = 0,4.

[$y=(1+x^2)(\operatorname{arctg} x+\dfrac{x}{1+x^2}+C)$, и C = 0,4]

8. $2xy'-y=x+1$, $y(2)$ = 4.

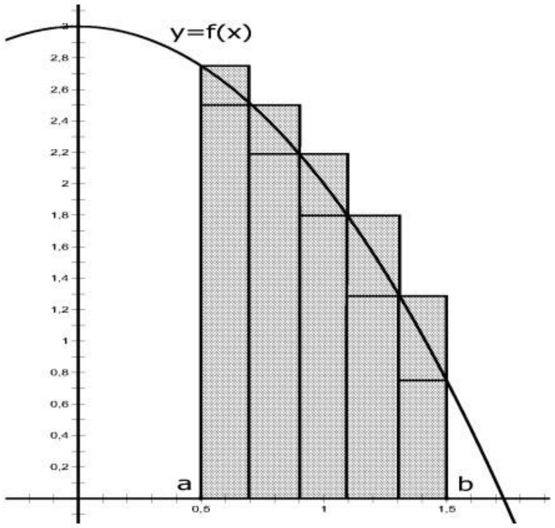
[дјелимо са $2x$, отуда $y=x-1+C\sqrt{x}$, и $C=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$]

4.3. Одређени интеграл

Одређени интеграл се може дефинисати помоћу површине P подручја у равни Oxy омеђеног графом позитивне функције $y = f(x)$ и x-осе, између вертикалних правих $x = a$ и $x = b$, гдје је $a < b$.

Подјелимо интервал $[a, b]$ на n подинтервала једнаке дужине $\Delta_n=\dfrac{b-a}{n}$, гдје је n произвољан природан број. Означимо апсцисе подјела са $x_0=a$, $x_1=a+\Delta_n$, $x_2=a+2\Delta_n$, ..., $x_n=b$. Скуп свих оваквих подјела датог интервала означимо са D.

У подручје чију површину желимо одредити, уписујемо и описујемо правоугаонике исте дужине основе $\Delta_n=\dfrac{b-a}{n}$, али висина $m_i=f(c_i)$, односно висина $M_i=f(C_i)$, $c_i,C_i\in[x_{i-1},x_i]$ (i = 1, 2, …, n), зависно од тога јесу ли правоугаоници уписани или описани. На слици је поменути интервал $[a, b]$ подјељен на n = 5 подинтервала једнаке дужине $\Delta_5=\dfrac{b-a}{5}$. За $i = 1, 2, \dots, n$, нека су c_i и C_i апсцисе из интервала $[x_{i-1}, x_i]$ редом, такве да су $f(c_i)$ и $f(C_i)$ висине уписаних и описаних правоугаоника. Сума, збир површина свих уписаних, односно описаних правоугаоника је $s_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_n$, односно $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta_n$. За тражену површину P очигледно важе неједнакости $s_n\le P\le S_n$.

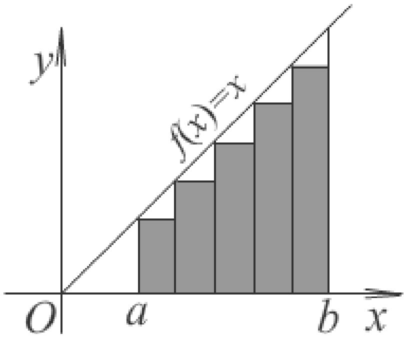


Доња интегрална сума $d(f,D)$ је највећа могућа збирна површина уписаних правоугаоника (инфимум), а **горња** интегрална сума $g(f,D)$ је најмања могућа укупна површина описаних правоугаоника (супремум). У складу са овим, **доњи** (Риманов) интеграл је број $I_*=\sup\{d(f,D)\}$, а **горњи** (Риманов) интеграл је број $I^*=\inf\{g(f,D)\}$.

Риманов интеграл, или **одређени интеграл** функције *f* од *a* до *b* је број $I = I_* = I^*$, ако такав постоји.

Ако постоји, одређени интеграл означавамо са $I = \int_a^b f(x)dx$, бројеве *a* и *b* интервала [*a*, *b*] називамо **доња** и **горња граница** интеграције, а *f* **подинтегралном** функцијом, интеграндом. Ттада кажемо да је дата функција **интеграбилна** на датом интервалу.

Примјер 4.3.1. Функција је права, симетрала I и III квадранта, тј. $f(x) = x$. Тражимо површину P између те функције и *x*-осе, на интервалу апсциса [*a*, *b*].



Дјелимо интервал (*a*, *b*) на *n* једнаких дјелова дужине $\Delta_n = \frac{b-a}{n}$. Према томе, $x_k = a + k\cdot\frac{b-a}{n}$, $f(x_{k-1}) = x_{k-1}$ = $a + (k-1)\Delta_n$, па је $s_n = \sum_{k=1}^{n}\left[a + (k-1)\Delta_n\right]\cdot\Delta_n$ = $\left[na + (1+2+...+(n-1))\cdot\Delta_n\right]\cdot\Delta_n$ = $\left[na + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\right]\cdot\Delta_n$ = ... = $\frac{b-a}{2}\cdot\left(a+b-\frac{b-a}{n}\right)$. Пустимо ли да $n \to \infty$, дужине свих интервала $\Delta_n \to 0$, па је $P = \frac{b^2-a^2}{2}$, тј. $\int_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2}$. ♦

Основна правила за израчунавање одређеног интеграла сљеде непосредно из дефиниције.

i. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

ii. $\int_a^a f(x)dx = 0$

iii. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ - хомогеност

iv. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ - адитивност

v. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

vi. $(\forall x\in[a,b])\ f(x) > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$

vii. $(\forall x\in[a,b])\ f(x)\le g(x)\ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Њутн-Лајбницова формула интегралног рачуна даје везу између неодређеног и одређеног интеграла. Доказ није тривијалан.

Теорема 4.3.2. Нека је функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интеграбилна на $[a, b]$ и нека за њу постоји примитивна функција $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ за сваки $x \in (a, b)$. Тада вриједи Њутн-Лајбницова формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказ. Нека је D произвољан растав интервала $[a, b]$ на n једнаких одсјечака. За сваки $i = 1, 2, \ldots, n$ функција F је непрекидна на интервалу $[x_{i-1}, x_i]$ и диференцијабилна на интервалу (x_{n-1}, x_i). Према Лагранжовом теорему средње вриједности (за непрекидну и диференцијабилну функцију f на датом интервалу постоји тачка ξ тог интервала таква да је $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(z)}{b-a}$) постоји тачка $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ за коју вриједи $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Поред тога, вриједи

$$\inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = m_i \le f(\xi) \le M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

што повлачи

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \le F(x_i) - F(x_{i-1}) \le M_i(x_i - x_{i-1}),\quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Сабирајући све ове неједнакости добијамо

$$m(f, D) \le \sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right] \le M(f, D),$$

односно

$$m(f, D) \le F(b) - F(a) \le M(f, D).$$

Ове неједнакости важе за произвољан растав D сегмента $[a, b]$ из чега слиједи

$$I_* \le F(b) - F(a) \le I^*.$$

Интеграбилност функције f повлачи $I_* = I^* = \int_a^b f(x)dx$, па је коначно $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, што је и требало доказати.♦

Дакле, одређени интеграл рјешавамо тако што прво нађемо неодређени интеграл подинтегралне функције, а затим уврстимо границе и од горње израчунате вриједности одузмемо доњу.

Уобичајено је Њутн-Лајбницову формулу писати овако $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

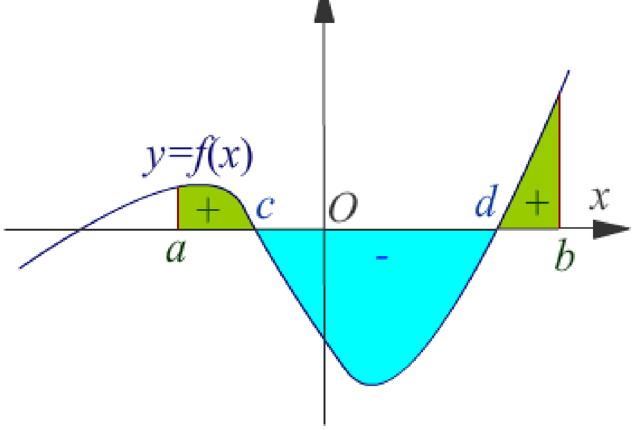
Примјери 4.3.3.

А) За функцију $f(x) = x$ из претходног примјера (4.3.1) имамо $\int_a^b xdx = \frac{x^2}{2} + C\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}$, што се слаже са претходно добијеним резултатом. Примјетимо да ће се константа интегрирања увијек поништавати, ради чега је и нећемо писати.

Б) Површина између синусоиде $f(x) = \sin x$ и x-осе, на једном интервалу синусоидекоји је изнад x-осе, рецимо $[0, \pi]$, износи $\int_0^\pi \sin xdx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$.

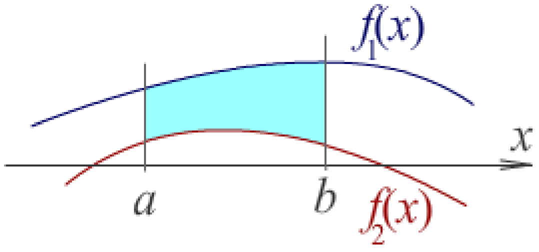
В) Област од исходишта до апсцисе 1 испод параболе $f(x) = x^2$ има површину $\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.♦

Примјер 4.3.4. Површина фигуре ограничене функцијом $y = f(x)$, x-осом, правома $x = a$ и $x = b$ је



$$P = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx,$$

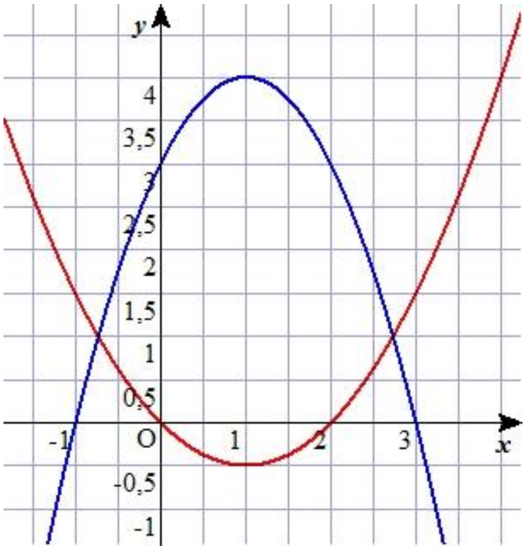
што се види на слици лијево.



На слици десно, област између кривих $f_1(x)$ и $f_2(x)$, при чему $(\forall x\in[a, b])$ је $f_1(x) \geq f_2(x)$, и између правих $x = a$ и $x = b$, има површину $P = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$.♦

Примјер 4.3.5. Наћи површину између двије параболе $y_1 = -x^2 + 2x + 3$ и $y_2 = 0{,}5x^2 - x$.

Рјешење: Прво тражимо тачке пресјека *A* и *B* парабола. Из $y_1 = y_2$ слиједи $1{,}5x^2 - 3x - 3 = 0$, па $x^2 - 2x - 2 = 0$. Ова квадратна једначина има рјешења $x_{12} = 1 \pm \sqrt{3} \approx \begin{cases} 2{,}732 \\ -0{,}732 \end{cases}$. Обе ординате су 1, тачке пресјека су $A(-0{,}732;1)$ и $B(2{,}732;1)$, па је тражена површина, приближно:



$$P \approx \int_{-0{,}732}^{2{,}732} (y_1 - y_2)dx = \int_{-0{,}732}^{2{,}732} (-1{,}5x^2 + 3x + 3)dx =$$

$$= \frac{-1{,}5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 3x \Big|_{-0{,}732}^{2{,}732} = 10{,}392.$$

Дакле, $P \approx 10{,}4$.♦

Да бисмо одредили **дужину лука** криве $y = f(x)$, примјењујемо Питагорину теорему у малом (инфинитезималном) правоуглом троуглу $ds^2 = dx^2 + dy^2$. У Декартовом правоуглом систему координата, dx и dy су прираштаји дуж x и y осе, а ds је прираштај дуж дате криве, тј. дужина инфинитезималног лука. Отуда $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, а због $\frac{dy}{dx} = y'(x)$, имамо $ds = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$.

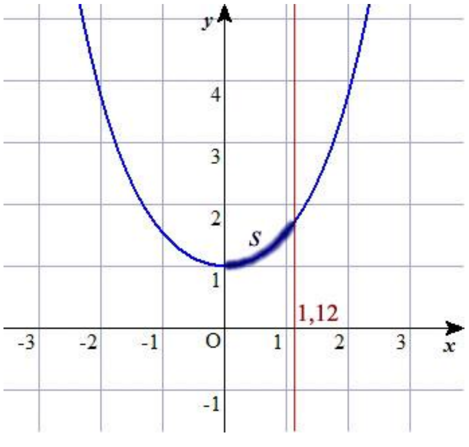
То је израз за **диференцијал лука** криве $y = f(x)$. Интегрирањем добијамо дужину *s* лука криве:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$$

Понекада је згодније узети y као независну промјенљиву, односно прећи на инверзну функцију $x = f^{-1}(y)$, када аналогно, добијамо ($\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$):

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + x'^2(y)}\,dy.$$

Примјер 4.3.6. Наћи дужину лука ланчанице $y = \operatorname{ch} x$, од апсцисе $x = 0$ до $x = 1{,}12$.



Рјешење: Израчунавамо редом

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

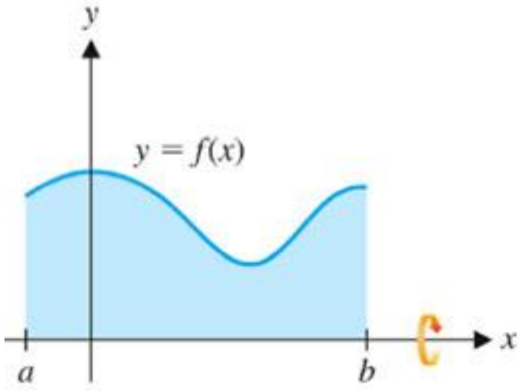
$$y' = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

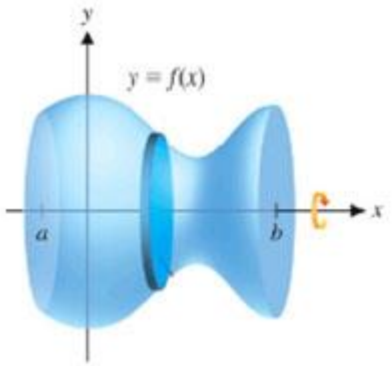
$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch} x,$$

$$s = \int_0^{1{,}12} \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x \Big|_0^{1{,}12} = \operatorname{sh} 1{,}12 = 1{,}37.$$

Граф ланчанице је на слици лијево.♦

Запремина тијела се израчунвава помоћу двоструког интеграла. Међутим, помоћу обичног, једноструког одређеног интеграла још увијек можемо израчунати запремину тијела које настаје ротацијом неке површине око неке (x или y) осе.



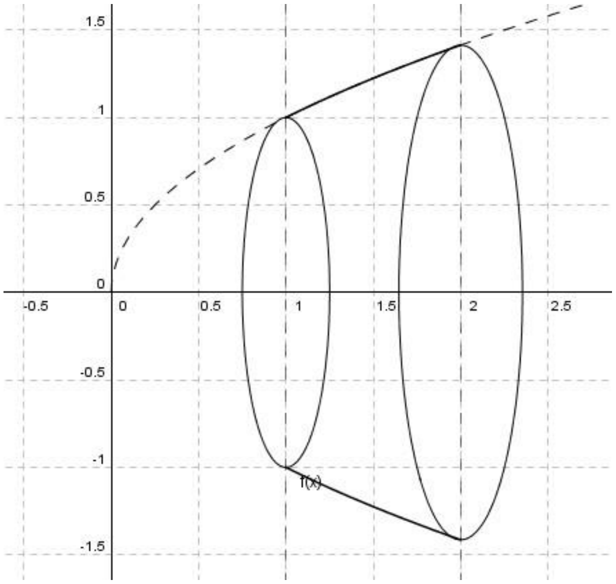


На сликама је дата површина изнад x-осе до функциј $y = f(x)$ и запремина која настаје њеном ротацијом око x-осе. Запремина овако насталог **ротационог тијела** и површина омотача су:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx, \qquad S = 2\pi \int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f^2(x)}dx.$$

Примјер 4.3.7. Крива $f(x) = \sqrt{x}$ на итервалу $x \in [1,2]$ ротира око x-осе. Наћи запремину насталог тијела и површину његовог омотача.

Рјешење:



Запремина:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \int_1^2 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = 4{,}7124.$$

Површина:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f^2(x)}dx =$$

$$= 2\pi \int_1^2 \left|\sqrt{x}\right| \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx$$

$$= 8{,}2832.$$

Задаци 4.3.8.

1. Примјеном Њутн-Лајбницове формуле израчунати одређене интеграле

$$\int_{-1}^{2}\left(2x^3-3x\right)dx,\qquad \int_{1}^{3}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx,$$

$$\int_{1}^{3}\left(-\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}\right)dx,\qquad \int_{0}^{1}\left(\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt{x}\right)dx.$$

2. Израчунати интеграле

$$\int_{0}^{2}\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx,\qquad \int_{1}^{3}\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx,$$

$$\int_{-1}^{2}\frac{x^2-x-6}{x+2}dx,\qquad \int_{0}^{1}\frac{x^2+3x-10}{x-2}dx.$$

3. Израчунати

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx,\qquad \int_{1}^{3}\frac{e^x-e^{-x}}{2}dx,$$

$$\int_{-2}^{0}\frac{x+1}{x-1}dx,\qquad \int_{2}^{3}\frac{x-1}{x+1}dx.$$

4. За које вриједности с важи једнакост $\int_{a}^{b}f(x)dx=f(c)(b-a)$, ако је

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ a=0,\ b=1,\qquad f(x)=\frac{1}{1+x^2},\ a=0,\ b=1.$$

5. Наћи сва рјешења по a једначине $\int_{0}^{a}\cos(x+a)dx$ на интервалу [2, 3].

6. За које вриједности реланог броја a је тачна неједнакост

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{1}^{a}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}+1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx<4\ ?$$

7. Криволинијски трапез ограничен је правама $x=a$ и $x=2a$, $a>0$, и графиком функције $y=1+\frac{1}{x^2}$. Одредити реалан број a тако да површина трапеза буде минимална.

8. Одредити све реалне бројеве a и b за које за функцију $f(x)=a\sin\pi x$ важи

$$f(1)=2\int_{0}^{2}f(x)dx=4.$$

9. Помоћу интеграла израчунати површину: **а**) круга; **б**) елипсе.

10. Израчунати површину дјела равни ограниченог параболама $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$.

11. Израчунати површину фигуре ограничене линијама:

$y = 3x^2 - 1$ и $y = x^2 + 1$; $\qquad y = x^2 - 1$ и $y = x + 1$;

$y = -x^2 + 2x + 1$ и $y = \frac{2}{x}$; $\qquad y = \frac{1}{x^2+1}$ и $y = \frac{x^2}{2}$.

12. Наћи дужину лука параболе $y = x^2 - 9$ између њених нула.

13. Одредити дужину лука криве $9y^2 = 4x^3$ између $x = 0$ и $x = 3$.

14. Наћи дужину једног лука астроиде $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

15. Израчунати запремину тијела које настаје ротацијом дијела површине ограничене кривама:

a) $2y = 3x^2$ и $x^2 + y^2 + 6x = 0$, око *x*-осе.

b) $y = -x^2 + 2$ и $y = |x|$, око *x*-осе.

c) $x^2 - y^2 = 1$ и $y^2 - 4x = 0$, око *y*-осе.

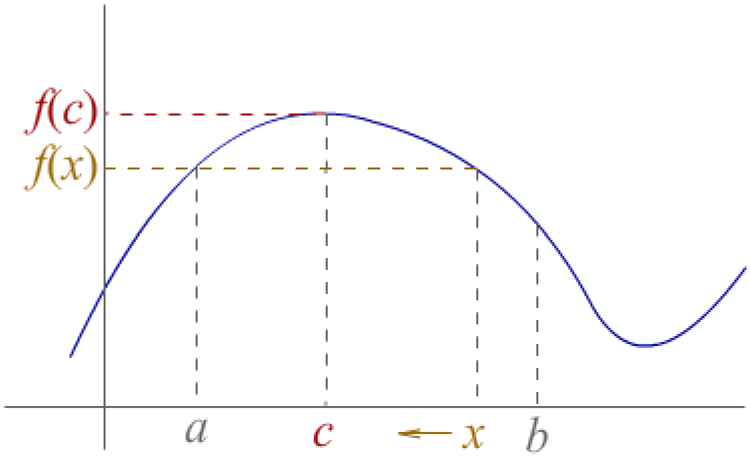
d) $y = x^3$, $y = 8$ и $x = 0$, око *y*-осе.

16. Наћи површине омотача фигура из претходног задатка.

4.4*. Теореме диференцијалног рачуна[14]

Теорема (Ферматова) 4.4.1. Нека функција *f* у тачки $c \in (a, b) \subseteq D$ има своју најмању или највећу вриједност на итервалу (a, b). Ако постоји деривација функције у тачки *c*, тада је $f'(c) = 0$.

Доказ: Доказујемо да функција *f* у тачки *c* узима највећу вриједност на интервалу (a, b). Ако *f* није деривабилна у датој тачки, тада је теорем доказан. Ако постоји $f'(x)$, тада у тачки $x = c$ постоје и деривације сљева и сдесна и оне су једнаке.На слици десно видимо:



$$f'(c_-) = \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{(-)}{(-)} \geq 0$$

,

$$f'(c_+) = \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{(-)}{(+)} \leq 0$$

Како су ова два лимеса једнака, оба морају бити једнака нули, па је $f'(c) = 0$.

Слично се ради у случају најмање вирједности. Тиме је Ферматова теорема доказана.♦

[14] Ово је допуна разматрања из наслова 3.5. Средња вриједност, али се може наћи и на интернету.

Бирање отвореног интервала у Ферматовој теореми је важно да би функција могла имати најмању или највећу вриједност у тачки унуар интервала, а у којој деривација није нула. То се види и на претходној слици, гдје функција на затвореном интервалу $[a, b]$ има своју најмању вриједност управо у тачки b у којој њен извод није нула.

Непосредна посљедица ове теореме је сљедећи став.

Став 4.4.2. Функција f може имати екстрем у тачки $x \in D$ само ако или није деривабилна у x (не постоји $f'(x)$), или је $f'(x) = 0$.

Теорема (Ролова) 4.4.3. Нека је функција f непрекидна на затвореном интервалу $[a, b]$, деривабилна на отвореном интервалу (a, b) и нека је $f(a) = f(b)$. Тада постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f'(c) = 0$.

Доказ: Први случај, ако је f константна на интервалу $[a, b]$, тада је $f'(x) = 0$ за свако x, па је теорема доказана. Други случај, ако f није константна, тада она узима своју највећу или најмању вриједност у некој тачки $c \in (a, b)$ па тврђење Ролове слиједи из Ферматове теореме.♦

Теорема (Кошијева) 4.4.4. Нека су функције $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$, непрекидне на датом затвореном и деривабилне на отвореном интервалу (a, b). Тада постоји тачка $c \in (a, b)$ да је

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Доказ: Претпоставка $g(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$ повлачи да је $g(a) \neq g(b)$. Наиме, ако би вриједило $g(a) = g(b)$, тада би према Роловој теореми постојала тачка $x \in (a, b)$ за коју је $g'(x) \neq 0$.

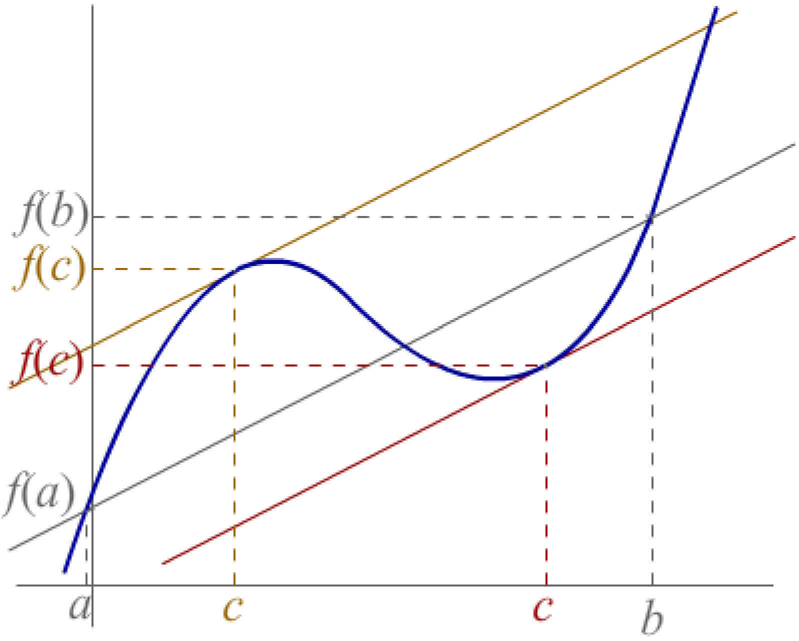
Дефинишимо функцију $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$, гдје је примјетимо, називник различит од нуле. За домене, очигледно вриједи $D_F = D_f \cap D_g$ и $F(a) = F(b) = 0$. Из непрекидности и деривабилности функција f и g на датом интервалу, слиједи иста особина функције F. Дакле, функција F испуњава услове Ролове теореме па постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $F'(c) = 0$. Отуда $0 = F'(c)$ = $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$, чиме је Кошијева теорема доказана.♦

Ставимо ли $g(x) = x$, из Кошијеве теореме слиједи $g'(x) = 1$ и $g(b) - g(a) = b - a$, па добијамо сљедећу теорему.

Теорема (Лагранжова) 4.4.5. Нека су функције $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$, непрекидне на датом затвореном и деривабилне на отвореном интервалу (a, b). Тада постоји тачка $c \in (a, b)$ да је

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.♦$$

Лагранжова теорема се често назива и Теорема средње вриједности, што је лакше може разумјети

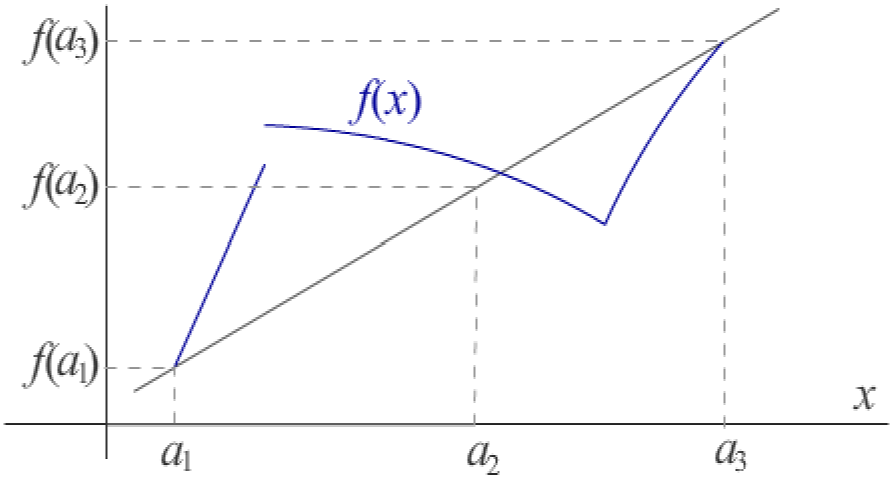


помоћу сљедећег њеног доказа, на основу слике лијево.

Разломак $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ има вриједност коефицијента сјечице која пролази тачкама $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, а вриједност $f'(c)$ је коефицијент смјера тангенте кроз тачку $C(c, f(c))$.

Лагранжова теорема тврди да постоји тачка у којој је тангента паралелна са сјечицом. Примјетимо да се Лагранжовом теоремом утврђује само постојање тачке $c \in (a, b)$, али да се не искључује могућност постојања више таквих тачака.

За разумјевање иначе веома важне Лагранжове теореме, примјетимо да је *f* непрекидна на дсатом затвореном, а деривабилна на истом отвореном интервалу. Наиме, када *f* не би била непрекидна, тада би била могућа ситуација лијево на сљедећој слици, па тражена тачка *c* не би постојала. Међутим, ако *f* не би била деривабилна (али јесте непрекидна), тада је могућа ситуација као на истој слици десно, па тражена тражена тачка *c* опет не би постојала.



Наставак Кошијеве и Лагранжове теореме о средњој вриједности деривације је сљедећа теорема за одређени интеграл.

Теорема (Средње вриједности) 4.4.6. За непрекидне функције $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$, постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$. Посебно (за $g(x) \equiv 1$) важи $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

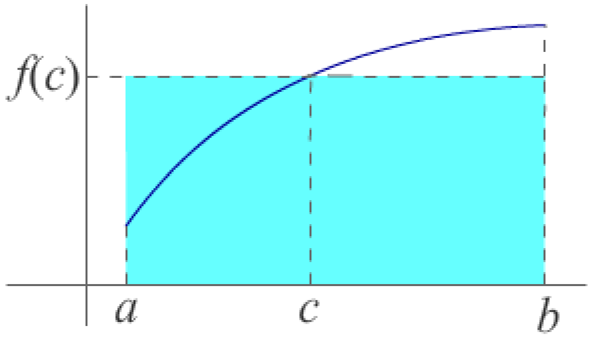
Доказ: Нека су F и G примитивне функције од f и g, на датом интервалу. Функције f и g су непрекидне, па су F и G деривабилне на датом интервалу, и $G'(x) = g(x) \neq 0$. Функције F и G испуњавају услове Кошијеве теореме, па постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је

$$\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

чиме је доказан први дио теореме. Други дио слиједи непосредно из $g(x) \equiv 1$.♦

И ова теорема има своју графичку интерпретацију, на слици десно.

Површина између функције $f(x)$ и апсцисе, од a до b, једнака је површини правоугаоника са основом $b - a$ и висином $f(c)$. Ове површине могу бити и негативне. Вриједност $f(c)$ је средња вриједност дате функцијена интервалу $[a, b]$.



4.5*. Друге координате

Узмимо прво, да је крива задата једначинама у **параметарском** облику:

$$x = x(t),\ y = y(t), \text{ за интервал } t_1 \leq t \leq t_2.$$

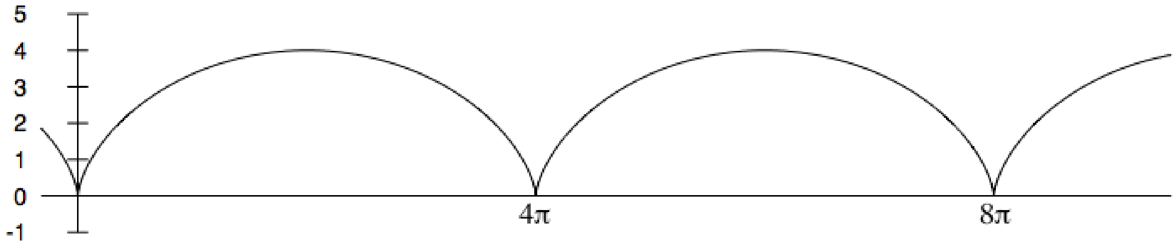
Тада израчунавамо $dx = x'(t)dt$, па уврштавање у $P = \int_a^b ydx$ даје површину

$$P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt,$$

гдје је $t = t_1$ за $x = a$, а $t = t_2$, за $x = b$.

Примјер 4.5.1. Наћи површину једног лука циклоиде.

Рјешење. Циклоида је траг који оставља тачка на кружници која се котрља дуж x-осе. На сљедећој слици је циклоида настала котрљањем кружнице полупречника $r = 2$.



Једначине циклоиде у параметарском облику су $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$, гдје узимамо $0 \le t \le 2\pi$. Отуда, $x'(t) = r(1 - \cos t)$ и

$$P = \int_0^{2\pi} r(1-\cos t) r(1-\cos t) dt = r^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt =$$

$$= r^2 \left(\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \right).$$

Како је други интеграл (у загради) једнак нули, имамо

$$P = r^2 \left| t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right|_0^{2\pi} = r^2 (2\pi + \pi + 0) \quad ,$$

$$P = 3r^2\pi .$$

Дакле, површина једног лука циклоиде једнака је трострукој површини круга, који генерише ту циклоиду.♦

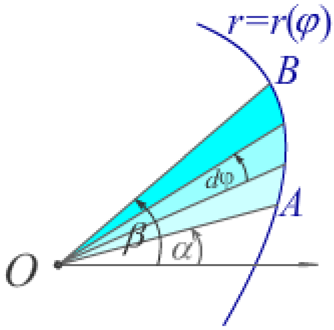
У поларним координатама,инфинитезимални елеменат површине је

$$dP = \frac{1}{2} r^2 d\varphi ,$$

па је површина

$$P = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) \cdot d\varphi .$$

То је површина сектора *OAB*, омеђеног луком *AB* дате криве $r = r(\varphi)$ и радијус-векторима *OA* нагибног угла α и *OB* угла β, као што се види на слици десно.

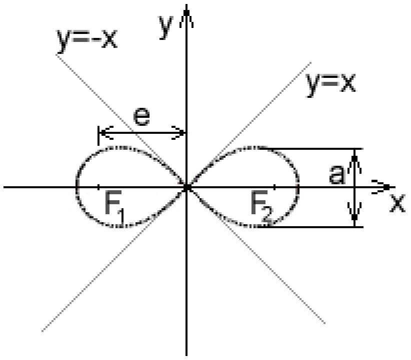


Примјер 4.5.2. Израчунати површину лемнискате $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Рјешење: Узмимо да је *a* = 2 и израчунајмо неколико тачака дате криве. За $r(\varphi) = \pm\sqrt{\cos 2\varphi}$ добијамо: $r(0) = \pm 2$, $r\left(\frac{\pi}{8}\right) = \pm 2\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}} = \pm 1{,}68$, $r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pm 2\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}} = 0$,

$r\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \pm 2\sqrt{\cos\frac{3\pi}{4}} = \pm 2\sqrt{-0{,}71}$ - имагинарно, ... Иначе, леминиската у Декартовим правоуглим координатама има једначину $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, гдје је параметар a највећа удаљеност криве од исходишта, коју достижу двије тачке криве, обе на x-оси. Умањени облик леминискате се обично користи као симбол за бесконачност.

Лемниската је крива која се састоји од двије петље које се сјеку у центру *O*, као на сљедећој слици



десно. Та крива је такође позната као Бернулијева лемниската. Она је симетрична у односу на поларну осу и на пол *O*, па можемо рачунати само четвртину тражене површине.

$$\frac{P}{4} = \frac{a^2}{2}\int \cos 2\varphi \cdot d\varphi = \frac{a^2}{2}\left|\frac{\sin 2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

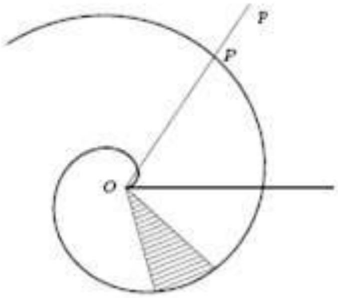
$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{a^2}{4},$$

па је $P = a^2$.♦

Примјер 4.5.3. Површина једног завоја Архимедове спирале $r = a\varphi$ је

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\left|\frac{\varphi^3}{3}\right|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{6}\cdot 8\pi^3, \text{ тј.}$$

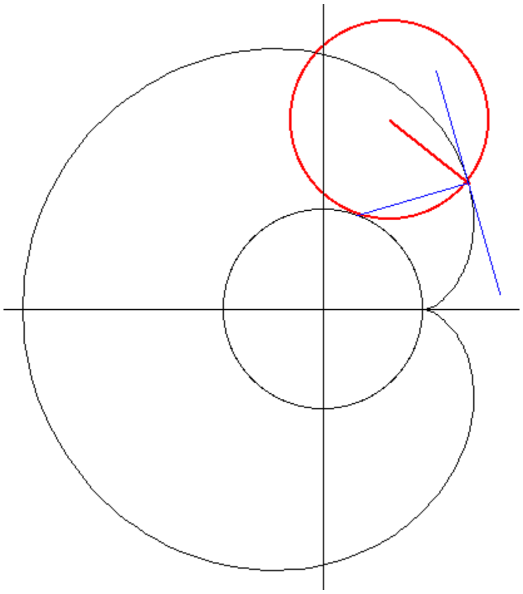
$$P = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.♦$$



Тачка описује Архимедову, или аритметичку спиралу када се радијус-вектор положаја *Op* једнолико окреће око пола *O*, а тачка *P* се креће дуж радијус-вектора.

Примјер 4.5.4. Наћи површину кардиоиде (срцасте кривуље) $r = a(1 - \cos\varphi)$.

Рјешење:



$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\left|\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot(2\pi+\pi), \text{ тј.}$$

$$P = \frac{3}{2}a^2\pi. \blacklozenge$$

Кардиоида (грч. καρδία – срце) је крива у равни коју описује тачка на кружници круга који се креће око другог фиксираног круга истог полупречника.

4.6*. Примјене у физици

У физици се (линијски) интеграли користе за израчунавања: рада силе на објекту који се креће пољем силе, масе жице, центра масе и момента инерције жице, магнетног поља око кондензатора (Амперов закон), напона генерисаним петљом (Фарадејев закон магнетске индукције) и сличних проблема.

Рад силе 4.6.1. Нека се материјална тачка M помјера из положаја $x = a$ у положај $x = b$ дуж апсцисе под дејством константне силе $\vec{F} = F\vec{\imath}$. Тада је рад[15] (енг. *work*) силе $W = F\cdot(a - b)$.

Када рад силе није константан, већ је то непрекидна функција положаја x материјалне тачке у кретању, тј. када је $F = F(x)$ за $x \in [a, b]$, тада дати интервал $[a, b]$ дијелимо на подинтервале тачкама $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$. Ових $n \in \mathbb{N}$ подинтервала означимо са $\Delta x_k = x_{k-1} - x_k$, за $k = 1, 2, \dots, n$. Ако је Δx_k мало, због непрекидности, можемо узети да је функција $F(x)$ на том интервалу константна и да је једнака $F(t_k)$. Према томе, $\Delta W_k = F(t_k)\Delta x_k$ је рад силе на дјелу пута $[x_{k-1}, x_k]$.

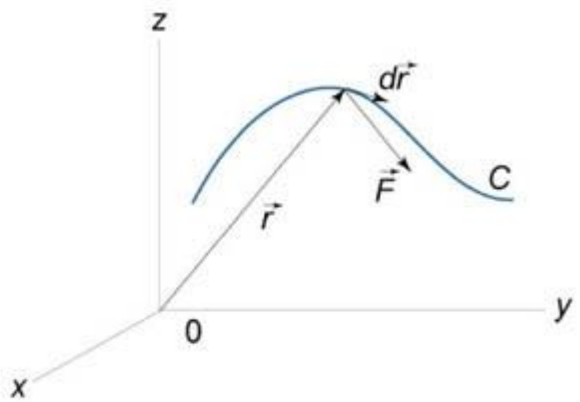
Када је подјела интервала $[a, b]$ таква да је сваки од подинтервала $[x_{k-1}, x_k]$ приближно инфинитезималан, онда се рад W силе $F(x)$ на путу од $x = a$ до $x = b$ дефинише са

$$W = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} F(t_k)\Delta x_k = \int_a^b F(x)dx.$$

Десно је интеграл који представља рад промјенљиве силе дуж x-осе.

---

15 Рад силе се у нашој литератури означава и са *A*.



Уопште, сила и радијус вектор положаја материјалне тачке су вектори

$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ и $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,

представљени графом лијево, а израчунавамо рад под дејством силе сабирајући инфинитезимална премјештања $d\vec{r}$ материјалне тачке дуж неке криве *C*. Укупни рад је интеграл

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}\ .$$

Унутар интеграла је скаларни производ вектора

$$\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = F_x\cdot dx + F_y\cdot dy + F_z\cdot dz,$$

па је

$$W = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz\ .$$

Када се објекат креће у само двије димензије, рецимо у *xy* равни, онда се у претходним изразима стави да је $F_z = dz = 0$.♦

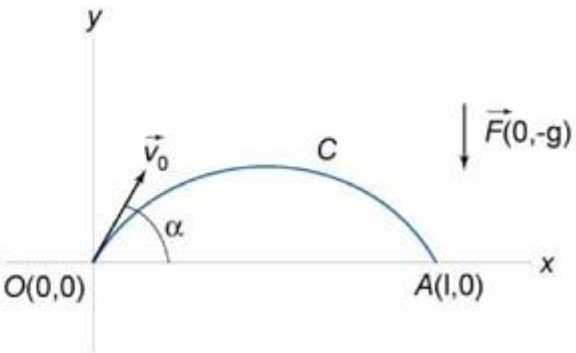
Најопштији, мада не и најсложенији од ових случајева је у сљедећем примјеру.

Примјер 4.6.2. Објекат масе *m* бачен је под углом α са почетном брзином v_0. Израчунати рад гравитационе силе $\vec{F} = m\vec{g}$ док се објекат креће до пада на тло.

Рјешење: Прво тражимо једначине кретања у параметарском облику, узимајући за параметар *t* вријеме:

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha \cdot t,$$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$



У тренутку пада на тло је *y* = 0, одакле израчунавамо протекло вријеме. Дакле из једначине $v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} = 0$, растављањем на факторе добијамо $t\left(v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt}{2}\right) = 0$ и налазимо протекло вријеме $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$.

Гравитациона сила се може писати у облику $\vec{F} = m\vec{g} = m(0, -g)$. Компоненте силе означавамо $P = F_x$, $Q = F_y$, па рад помјерањем објекта дуж путање можемо писати

$$W=\int_{\alpha}^{\beta}\left[P\frac{dx}{dt}+Q\frac{dy}{dt}\right]dt=\int_{0}^{\frac{2v_0\sin\alpha}{g}}\left[0\cdot\frac{dx}{dt}-g\cdot\frac{dy}{dt}\right]dt=-g\int_{0}^{\frac{2v_0\sin\alpha}{g}}\left(\frac{dy}{dt}\right)dt=-g\int_{0}^{\frac{2v_0\sin\alpha}{g}}dy(t)$$

$$=-g\,y(t)\Big|_{t=0}^{\frac{2v_0\sin\alpha}{g}}=-g\left(v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{\frac{2v_0\sin\alpha}{g}}=-g\left(\frac{2v_0^2\sin^2\alpha}{g}-\frac{4gv_0^2\sin^2\alpha}{2g^2}\right)=0.$$

Објашњење резултата је сљедеће. Гравитационо поље Земље је конзервативно, чини један затворен систем, па је $\frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial y}=0$, гдје су компоненте силе $F_x = P$ и $F_y = Q$. Парцијални изводи $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ значе узимање извода функције $f(x,y)$ само по варијабли x сматрајући y константом, односно по варијабли y сматрајући x константом.

Скаларни потенцијал тог поља је у општем облику

$$u(x,y)=\int Pdx+C_1(y)=\int 0dx+C_1(y)=C_0+C_1(y).$$

Стављајући $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=-g$, налазимо $\frac{d}{dy}C_1(y)=-g$ или $C_1(y)=-gy+C_2$. Тако за потенцијал гравитационог поља добијамо

$$u(x,y)=C_0-gy+C_2=C-gy,$$

гдје је C константа која може бити нула, па је резултат $u(x,y) = -gy$. Отуда видомо да рад за помјерање објекта из тачке $O(0,0)$ у тачку $A(L,0)$ износи

$$W = u(A) - u(O) = 0.♦$$

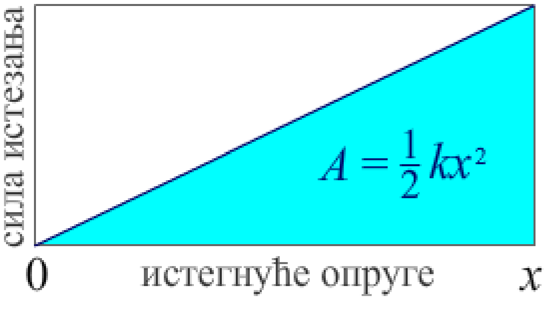
Сљедећи примјер је мало једноставнији.

Опруга 4.6.3. Еластична потенцијална енергија резултат деформације еластичног објекта, као што је опруга. Потенцијална енергија опруге једнака је раду који је потребан за истезање те опруге, што зависи од константе k опруге и њеног истегнућа x.

Према Хуковом закону, сила потребна за истезање је директно пропорционална истегнућу и може се представити формулом

$$F=-kx.$$

Потенцијална енергија оптуге једнака је раду уложеном за истезање опруге, тј.



$$A = \int_0^x kxdx = \frac{kx^2}{2}.$$

Тај се рад може и визуелизовати површином испод графа силе, као на слици горе.♦

Ово је била прилично једноставна употреба интеграла. Међутим, у физици има проблема гдје је потребан мало сложенији приступ. Размотримо један такав случај.

Сљеди сличан, мало конкретнији примјер.

Примјер 4.6.4. Опруга је природне дужине 20 cm. Потребна је сила од 40 N за њено истезање на 30 cm. Колики је рад потребан за истезање ове опруге са 35 cm на 38 cm?

Рјешење: Према Хуковом занону, интензитет силе је $F(x) = kx$, гдје је $k > 0$ тзв. константа опруге, а x истегнуће од природне дужине опруге до датог положаја. Користећи овај закон, прво одређујемо константу узимајући x = 30 cm – 20 cm = 0,10 m, а затим примјењујемо исту формулу за истегнуће са 0,35 – 0,20 метара на 0,38 – 0,20 метара.

Дакле, прво налазимо $40 = 0{,}10k$, односно $k = 400$, а затим користећи формулу $F(x) = 400x$ израчунавамо интеграл

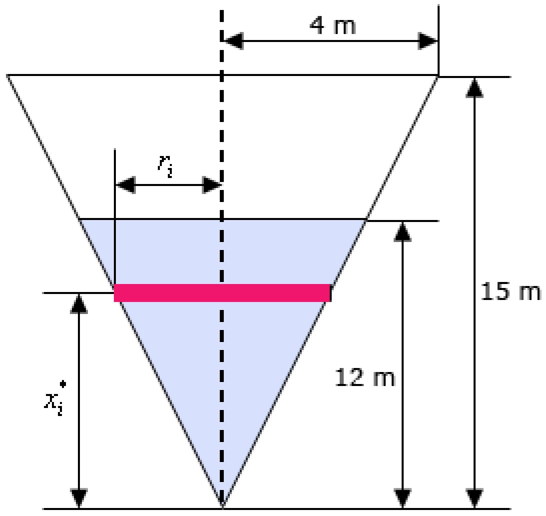
$$A = \int_{0,15}^{0,18} 400xdx = 200x^2 \Big|_{0,15}^{0,18} = 1{,}98 \text{ J}.$$

За истезање опруге са 35 cm на 38 cm је потребан рад од 1,98 џула (J = Nm = kg m^2/s^2).♦

Сљедећи примјер је мало сложенији.

Примјер 4.6.5. Посуда облика обрнуте купе има висину 15 метара са базом полупречника 4 метра, напуњена је водом до дубине 12 метара. Колики је био потребан рад за испумпавање те количине воде из посуде? Густина воде је 1000 kg/m^3.

Рјешење: Нека је $x = 0$ дно посуде, а $x = 15$ врх. Интервал висине [0, 12] подјелимо корацима Δx на



n дјелова. Тако, сваком подинтервалу на висини x_i^* приближно одговара количина воде која стане у цилиндар полупречника r_i и висине Δx. На слици лијево је скица посуде. Отуда лако добијамо $r_i : x_i^* = 4:15$, тј. $r_i = \frac{4}{15} x_i^*$.

Маса Δm_i воде запремине $\Delta V_i = \pi r_i^2 \Delta x$ цилиндра је

$$\Delta m_i = (\text{густина}) \cdot \Delta V_i, \text{ односно}$$

$$\Delta m_i \approx (1000) \cdot \pi r_i^2 \Delta x =$$

$$= 1000\pi \left(\frac{4}{15} x_i^* \right)^2 \Delta x, \text{ тј.}$$

$$\Delta m_i = \frac{640}{9} \pi \left(x_i^* \right)^2 \Delta x.$$

За подизање те воде на висину x_i^* морамо савладати гравитациону силу, приближно $\Delta F_i = \gamma \Delta m_i = (9{,}8)\frac{640}{9}\pi(x_i^*)^2 \Delta x$, при чему вода иде на висину $15 - x_i^*$ да би се могла избацити из посуде. Рад потребан да се из *i*-тог подинтервала вода подигне до врха посуде је приближно

$$\Delta A_i = \Delta F_i \cdot (15 - x_i^*) = (9{,}8)\frac{640}{9}\pi (x_i^*)^2 (15 - x_i^*) \Delta x.$$

Укупни рад је збир $A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i$, или тачније

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (9{,}8)\frac{640}{9}\pi (x_i^*)^2 (15 - x_i^*) \Delta x, \text{ тј.}$$

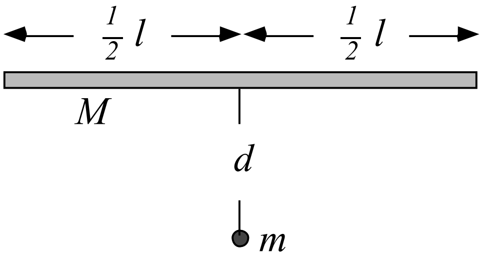
$$A = \int_0^{12} (9{,}8)\frac{640}{9}\pi x^2 (15 - x) dx = (9{,}8)\frac{640}{9}\pi \int_0^{12} (15x^2 - x^3) dx$$

$$= 9{,}8 \cdot \frac{640}{9}\pi (5x^3 - \tfrac{1}{4}x^4) \Big|_0^{12} = 7\,566\,362{,}543 \text{ J.} \blacklozenge$$

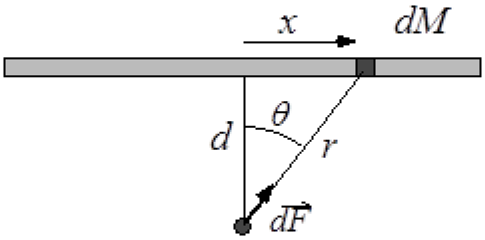
Проблеми који захтјевају интеграле у физици нису тешки само због интегрирања, већ и зато што је потребно много праксе док постанемо комотни са процесима превођења физичког проблема у одговарајући математички интеграл. Физичари то називају „постављање“ интеграла. Размотримо то на сљедећем примјеру.

Гравитација 4.6.6. На слици десно је приказан штап дужине *l* масе *M* константне густине. Он је у гравитационој интеракцији са „малим“ објектом масе *m* који је на удаљености *d* од центра штапа. Тражимо Њутнову силу привлачења објекта и штапа.

Кључно је овдје разумјети да се штап састоји од бесконачног (енг. *infinite*) броја елемената, чинећи инфинитезималну масу, да бисмо пронашли инфинитезимални ефекат сваке од тих инфинитезималних маса, а затим да их саберемо, тј. интегрирамо у укупни ефекат.



Зато имамо сљедећу слику, репрезентативни примјер једног од тих елемената (d*M*) укупне масе штапа, ради чега уводимо помоћне координате (*x*, θ, *r*). Битно је да овдје не бирамо један *посебан* елеменат



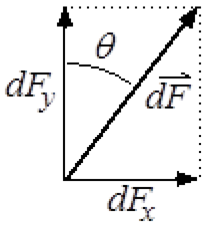
масе, већ дефинишемо *општи* елеменат. Износ (енг. *magnitude*) инфинитезималне привлачне гравитационе силе *dF* између маса *m* и *dM* је

$$dF = \gamma \frac{mdM}{r^2},$$

гдје је $\gamma = 6{,}67384 \times 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$ гравитациона константа. Укупна сила на штап је збир оваквих инфинитезимала, узиманих у различитим правцима, у смјеровима елемената штапа. Наиме, сила је вектор, па је

укупна сила $\vec{F}$ збир инфинитезималних вектора $d\vec{F}$, тј. интеграл

$$\vec{F} = \int d\vec{F}.$$



Компоненте силе, према слици десно, су

$$F_x = \int dF_x = \int dF \sin\theta = \int \frac{\gamma m dM \sin\theta}{r^2} \text{ и } F_y = \int \frac{GmdM\cos\theta}{r^2}.$$

Због симетрије, у овом примјеру очекујемо да укупна сила дуж апсцисе буде нула, тј. $F_x = 0$, тако да укупна сила привлачења штапа и објекта мора имати смјер ординате. Према томе,

$$F = F_y = \int \frac{\gamma m dM \cos\theta}{r^2}.$$

Затим је потребно изразити варијабле и одредити границе интеграла. Угао θ и растојање *r* зависе од посматраног елемента масе, али је лако показати да је

$$r^2 = d^2 + x^2 \text{ и } \cos\theta = \frac{d}{r} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + x^2}}.$$

Инфинитезимална дужина и маса штапа су *dx* и *dM*, ра је $dM = \frac{M}{l} dx$. Интеграл треба рачунати за свако *x* од – *l*/2 до + *l*/2, па имамо

$$F = \gamma \frac{Mmd}{l} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dx}{\left(d^2 + x^2\right)^{3/2}}.$$

На овом мјесту је физикални проблем је сведен на математички проблем.♦

Остали задаци у којима се користи (линијско) интегрирање у физици су: маса жице, центар масе и моменти инерције жице, магнетска поља око кондензатора (Амперов закон), напон генерисан петљом (Фарадејев закон магнетске индукције), итд.

Маса жице 4.6.7. Претпоставимо да имамо парче жице дефинисано кривом *C* у три димензије. Маса по јединици дужине жице је непрекидна функција $\rho(x,y,z)$. Тада је укупна маса жице

$$m = \int_C \rho(x,y,z)ds\ ,$$

гдје је $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ инфинитезимални елеменат дужине у простору, дужине дијагонале квадра инфинитезималних страница *dx*, *dy*, *dz*, паралелних осама Декартовог правоуглог система *OXYZ*. Како је криву *C* могуће представити параметарски вектором положаја $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то је маса жице

$$m = \int_a^b \rho(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt\ .$$

Ако је *C* крива у *xy* равни, тада је маса жице дата са

$$m = \int_C \rho(x,y)ds\ ,$$

или у параметарском облику

$$m = \int_a^b \rho(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\ .♦$$

Примјер 4.6.8. Жица је облика криве *C*, која је дуж од тачке *A*(1,1) до *B*(2,4). Наћи масу жице, ако је њена густина дата непрекидном функцијоме $\rho(x,y) = 3x + 2y$.

Рјешење: Прво тражимо параметарске једначине дужи *AB*:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = t\ \text{, односно}$$

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{4-1} = t\ \text{, тј.}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = t\ \text{, или}$$

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 3t+1 \end{cases}$$

гдје је параметар $t \in [0, 1]$. Затим израчунавамо масу жице

$$m = \int_a^b \rho(x,y,z)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \;=\; \int_0^1 [3x(t) + 2y(t)]\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \;=$$

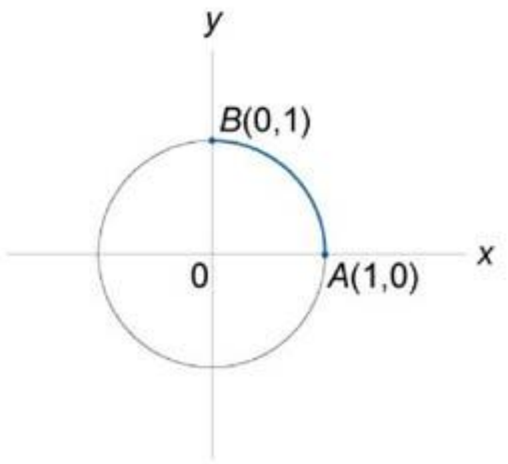
$$\int_0^1 [3(t+1) + 2(3t+1)]\sqrt{\left(\frac{d(t+1)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(3t+1)}{dt}\right)^2}\,dt \;=\; \int_0^1 (9t+5)\sqrt{1^2+3^2}\,dt \;=\; \sqrt{10}\int_0^1 (9t+5)dt \;=$$

$$\sqrt{10}\left(\frac{9t^2}{2} + 5t\right)\Big|_0^1 \;=\; \frac{19\sqrt{10}}{2} \approx 30\,.\blacklozenge$$

Примјер 4.6.9. Нађи масу жице облика лука круга $x^2 + y^2 = 1$ од тачке $A(1, 0)$ до тачке $B(0, 1)$. Густина жице је дата формулом $\rho(x,y) = xy$.

Рјешење: Кружница полупречника један са центром у исходишту има параметарске једначине

$$x = \cos t\,,\; y = \sin t\,,$$



гдје је параметар $t \in [0, \pi/2]$. Даље, израчунавамо масу жице:

$$m = \int_a^{\frac{\pi}{2}} \rho(x,y,z)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,dt \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\,dt \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt \;=\; \frac{1}{4}(-\cos 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \;=$$

$$\frac{1}{4}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{1}{2}\,.\blacklozenge$$

Центар масе и момент инерције жице 4.6.10. Нека је жица облика криве C непрекидне густине $\rho(x,y,z)$. Координате центра масе жице дате су формулама

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m},\; \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m},\; \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m},$$

гдје су

$$M_{yz} = \int_C x\rho(x,y,z)ds\,,\; M_{xz} = \int_C y\rho(x,y,z)ds\,,\; M_{xy} = \int_C z\rho(x,y,z)ds$$

тзв. први моменти. Моменти инерције координатних оса су дати формулама

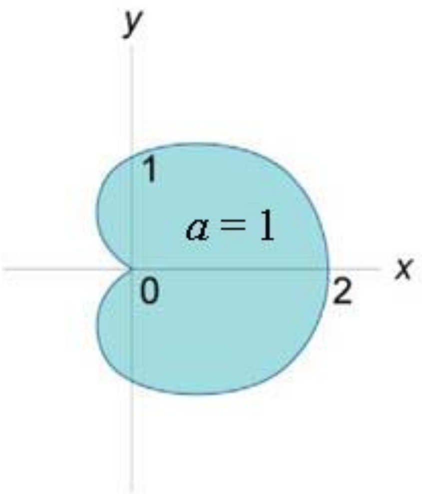
$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)ds\,,$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)ds\,,$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)ds\,.\blacklozenge$$

Примјер 4.6.11. Наћи центар масе жице облика кардиоиде $r = a(1 + \cos\theta)$, $a = 1$, густине $\rho = 1$.

Рјешење: Због симетрије је очигледно $\overline{y} = 0$. Да би нашли координату $\overline{x}$ центра масе, посматрајмо само горњу половину кардиоиде, на слици лијево. Прво рачунамо масу половине кардиоде у поларним координатама:



$$m = \int_a^b \rho(r,\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$= \int_0^\pi 1\cdot\sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{2\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\,d\theta = 4\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\,d\frac{\theta}{2} = 4\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi = 4\,.$$

Затим израчунавамо први моменат M_y формулом

$$M_y = \int_C F(x,y)ds = \int_a^b F(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\,.$$

Добијамо

$$M_y = \int x ds = \int_0^{\pi} r\cos\theta\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\cos\theta\sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\cos\theta\sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\cos\theta\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}2\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\left(2\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 - 1\right)\sqrt{2\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\,d\left(\frac{\theta}{2}\right) = 8\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^3\left(2\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 - 1\right)d\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Смјена $\theta/2$ = z даје даље

$$M_y = 16\int_0^{\pi/2}\cos^5 z dz - 8\int_0^{\pi/2}\cos^3 z dz = 16\int_0^{\pi/2}\cos^4 z d(\sin z) - 8\int_0^{\pi/2}\cos^2 z d(\sin z)$$

$$= 16\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 z)^2 d(\sin z) - 8\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 z) d(\sin z)$$

$$= 16\int_0^{\pi/2}(1-2\sin^2 z+\sin^4 z) d(\sin z) - 8\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 z) d(\sin z)$$

$$= 16\left[\sin z - \frac{2\sin^3 z}{3} + \frac{\sin^5 z}{5}\right]\Bigg|_0^{\pi/2} - 8\left[\sin z - \frac{\sin^3 z}{3}\right]\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= 16\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - 8\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{5}.$$

Отуда

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{16}{5}}{4} = \frac{4}{5}.$$

Дакле, (0, 4/5) је центар масе дате кардиоиде. ♦

Примјер 4.6.12. Наћи момент инерције I_x кружнице $x^2 + y^2 = a^2$, густине $\rho = 1$.

Рјешење: Једначине кружнице у параметарскм облику су

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Тада се моменат инерције I_x око x-осе може израчунати формулом

$$I_x = \int_C y^2 \rho ds = \int_0^{2\pi} (y(t))^2 \rho(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Према томе, имамо

$$I_x = \int_0^{2\pi} (a \sin t)^2 \cdot 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{d(a\cos t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(a \sin t)}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2 t \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} dt$$

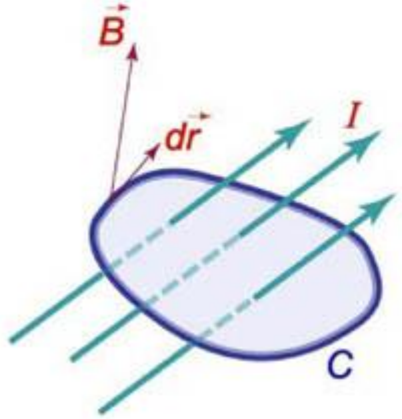
$$= \int_0^{2\pi} a^3 \sin^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = a^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = a^3 \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt$$

$$= \frac{a^3}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a^3}{2}(2\pi - 0) = \pi a^3.$$

Дакле, тражени момент инерције $I_x = \pi a^3$.♦

Сљедећи примјери су овдје због комплетирања приказа употребе линијских интеграла у физици.

Амперов закон 4.6.13. Линијски интеграл магнетног поља $\vec{B}$ око затворене путање C једнак је укупном протоку (флуксу) кроз ту затворену контуру, као на слици десно.

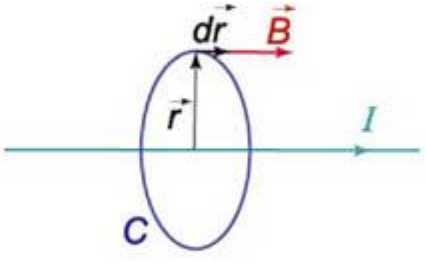


То се изражава формулом

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I,$$

гдје константа $\mu_0 = 1{,}26 \times 10^{-6}$ H/m представља тзв. пермеабилност вакума.♦

Примјер 4.6.14. Наћи магнетно поље у вакууму на удаљености *r* од осе, дуге равне жице кроз коју протиче струја *I*.



Рјешење: Разматрамо петљу полупречника r са центром на жици која је окомита на ток, као на слици лијево. Како је поље $\vec{B}$ константно и тангира петљу свугдје, векторски производ вектрора $\vec{B}$ и $d\vec{r}$ је просто *Bdr*. Отуда

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \oint_C B dr = B \oint_C dr = B \cdot 2\pi r.$$

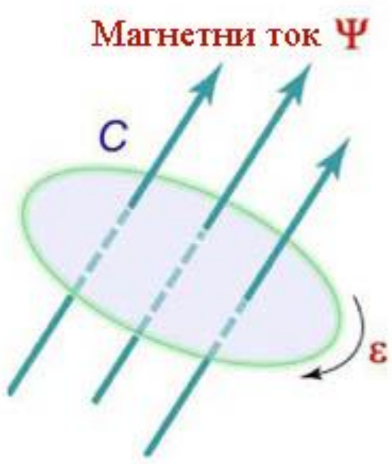
Резултат је $2\pi r B = \mu_0 I$, тј. $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.♦

Фарадејев закон 4.6.15. Фарадејев закон електромагнетске индукције даје однос промјена

магнетног флукса кроз површину S ограничену контуром C и електричног поља дуж те контуре. Означимо са $\vec{E}$ вектор електричног поља, са $d\vec{r}$ инфинитезимални елеменат контуре C, па ћемо за електромоторну силу ε имати израз:

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\psi}{dt}.$$

Фарадејев закон је заснован на Мајкл Фарадејевим експериментима 1831, а касније је уграђен у Максвелове једначине.♦



Примјер 4.6.16. Израчунати максималну електромоторну силу ε и електрично поље E индуцирано прстеном полупречника један центиметар док путник лети авионом у магнетном пољу Земље брзином 900 km/h.

Рјешење: Користимо Фарадејев закон. Када је магнетно поље $\vec{B}$ окомито на раван прстена, тада промјена флукса за вријеме Δt износи $\Delta\psi = 2rBx = 2rBv\Delta t$, гдје је v брзина авиона, а $x = v\Delta t$ је пређени пут, B је магнетно поље Земље. Из Фарадејевог закона имамо

$$\varepsilon = -\frac{d\psi}{dt} = 2rBv.$$

Замјеном датих вриједности

$$v = 900\ km/h = 250\ m/s, \quad r = 1\ cm = 0.01\ m, \quad B = 5 \cdot 10^{-5}\ T,$$

добијамо електромоторну силу

$$\varepsilon = 2rBv = 2 \cdot 0.01 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 250 = 0.00025\ V.$$

Као што видимо, то је износ безбједан за људе.

Електрично поље индуцирано прстеном налазимо из формуле $\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$. Због симетрије, индуцирано електрично поље ће бити константне јачине дуж прстена. Правац ће тангирати кружницу у свакој тачки. Према томе, линијски интеграл око круга је

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint_C E \cdot dr \cdot \cos 0 = E \oint_C dr = 2\pi r E.$$

Дакле, јачина електичног поља је

$$E = \frac{\varepsilon}{2\pi r} = \frac{0,00025}{2\pi \cdot 0,01} = 0,004 \text{ V/m.} \blacklozenge$$

5. Комбинаторика

Комбинаторика је теорија коначних скупова. Прецизније, то је грана математике која проучава пребројавање, комбиновање и прермутовање скупа елемената и математичке релације везане за њихове особине.

Комбиновање се у историји можда први пут јавља са идејом лавиринта. Према грчкој легенди, Лавиринт је био дворац краља Миноса, грађевина у Кнососу, на острву Криту срушен око 1700. године прије нове ере. Буквално, ријеч Лавиринт (грч. Λαβύρινθος – чит. Лабиринтос) значи „двосјекла сјекира“, јер су по зидовима дворца биле уклесане сјекире као религијски амблеми, па се он звао и „Палата сјекира“. То је била грађевина са многобројним одајама, компликовано повезаним системом пролаза и ходника, из којих је било тешко наћи излаз. Према грчком миту о Тезеју и Аријадни, Аријадна је помогла Тезеју да изађе из Лавиринта, да неби погинуо од руке Минотаура.

Друге историјске идеје које нас воде до комбинаторике су античке филозофије које се заснивају на основним својствима: топло-хладно, суво-влажно и слично. Троугаоне бројеве, који представљају комбинације реда два, тј. бројеве облика $\binom{n}{2}$ први су изучавали Питагорејци, од 6. До 4. в.п.н.е. Према Плутарху, Ксенократ је израчунао да је број слогова који се могу формирати од слова грчке азбуке 1002000000000. То је први забиљежени покушај рјешавања неког тежег комбинаторног проблема.

Из периода кинеске династије Хан (202. до 220. год. п.н.е.) је Књига размјене (И Цзин), у којој се појављује магични квадрат (ло шу) на слици десно. Према легенди, он се налазио на оклопу корњаче, која је изронила из ријеке Ло у вријеме цара Ји.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Једна од првих књига јеврејског филозофског мистицизма Књига стварања (Јоцира, око 100. год. п.н.е.) поставља темеље кабалистике. У њој се налази и прво, у историји познато, пребројавање пермутација[16]. Налазе се тачне вриједности неколико првих факторијела, након којих пише: „Продужи и добићеш бројеве које уста не могу изговорити нити ухо прихватити.“ У индијском класичном дјелу Анујогадвара – Сутра, једној од књига канона џаинизма, религиозног учења из периода око 500 године н.е. наводи се број 6·5·4·3·2·1 – 2, као број пермутација у којима елементи нису ни у растућем ни у опадајућем поретку[17].

Одговарајуће правило за пермутације са понављањем први пут се појављује у књизи Лилавати, индијског математичара Бхаскара (око 1150. год н.е.). Њемачки језуит Атанасијус Кирхер је у својој књизи (*Musurgia Universalis*, 1650.) издатој у Риму, дао тачно правило за налажење броја пермутација у случају када се један елеменат може појављивати више пута, док је испитивао проблем броја мелодија које се могу добити полазећи од датих нота.

[16] Solomon Gandz, Studies in Hebrew Astronomy and Mathematics, New York, Ktav, 1970, стр. 494-496.
[17] G. Chakravarti, Bull. Calcutta Math Soc., 24 (1932), 79-88.

Таблица биномних бројева добила је назив Паскалов троугао јер се први пут појављује у Паскаловом раду Трактат о аритметичком троуглу (*Traité du trianglearithmétique*, 1665.), који је и први рад из теорије вјероватноће, објављен тек након Паскалове смрти. Међутим, биномни бројеви су били познати много раније. Најстарије познато представљање Паскаловог троугла потиче из времена династије Сун (960 – 1279.) код кинеског математичара Јанг Цуеја. У расправи Тачно огледало четири елемента (Сзу-јиен Ји-чиен, 1303.) коју је написао кинески математичар Чжу Ши-Чи, такође се налази таблица биномних коефицијената. У тој расправи се за биномне бројеве каже да су познати од давнина.

5.1. Варијације

Варијације су уређени низови датих елемената. Тачније, рецимо да имамо скуп $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ и природан број k, такав да је $1\le k\le n$. Уређен низ $(a_1,a_2,...,a_k)$ називамо и уређена k-торка. Тада:

i. **Варијација** *k*-те класе **без понављања** у скупу *S* је свака уређена *k*-торка међусобно различитих елемената скупа *S*. Њихов број означавамо са V_k^n.
ii. **Варијација** *k*-те класе **са понављањем** у скупу *S* је свака уређена *k*-торка елемената из скупа *S*. Њихов број означавамо са $\overline{V_k^n}$.

Примјер 5.1.1. Дат је скуп $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

V_2^4 (без понављања)

(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
(2, 1)	(2, 3)	(2, 4)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 4)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)

$\overline{V_2^4}$ (са понављањем)

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

♦

Примјер 5.1.2. Колико се Морзеових слова може формирати из два основна знака „тачка“ и „црта“, ако се једно Морзеово слово састоји од највише пет основних знакова?

Рјешење: Овдје имамо варијације са понављањем, гдје је *n* = 2, а *k* = 1, 2, 3, 4, 5. Ако имамо само један знак, тада је број варијација $\overline{V_1^2}=2$, јер то слово може бити само „тачка“ или „црта“. Ако имамо два знака, имамо четири слова: тачка-тачка, тачка-црта, црта-тачка и црта-црта, па је $\overline{V_2^2}=4$. Сва слова са са три знака су облика А-Б-Ц, гдје је на сваком од мјеста А, Б, или Ц једно од двоје: „тачка“, или „црта“. Укупан број могућности је 2·2·2 = 8, па је $\overline{V_3^2}=8$. На сличан начин видимо да је $\overline{V_4^2}=2^4$ и $\overline{V_5^2}=2^5$. Коначно, слова са 1-5 знакова Морзеове азбуке има $\overline{V_1^2}+\overline{V_2^2}+\overline{V_3^2}+\overline{V_4^2}+\overline{V_5^2}$ = $2^1+2^2+2^3+2^4+2^5$ = $2+4+8+16+32$ = 62.♦

Број **варијација са понављањем** n елемлената k-те класе је

$$\overline{V_k^n} = n^k .$$

Примјер 5.1.3. Извлачимо једну карту из италијанског шпила, запишемо је па је вратимо назад у шпил. Поступак поновимо три пута и добијемо низ од три (записане) карте. Објаснити зашто је број начина за добијање тог низа

$$\overline{V_3^{40}} = 40^3 = 64\ 000.$$

Објашњење: Италијанске карте у шпилу садрже 40 играћих карата, по 10 у четири различите боје: Баштони (треф), шпаде (пик), купе (херц) и динари (каро). Свака од боја има по једну карту од вриједности 2, 3, 4, 5, 6, 7, ас, фант, коњ и краљ.
То су играће карте за бришкулу, трешету,

тријумф и сличне игре.

Након сваког извлачења једне карте из цијелог шпила имамо опет 40 могућности. Након три таква извлачења, број могућности је

$$40 \cdot 40 \cdot 40 = 64\ 000. \blacklozenge$$

Редамо ли k различитих од n равноправних елемената (гдје је $k \le n$) неког скупа, као што је већ речено, распоређујемо их у **варијације без понављања**. Број ових, варијација (без понављања) од n елемената k–те класе је

$$V_k^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) .$$

Примјетимо да је редосљед изабраних k елемената битан, али нису бирани сви елементи датог скупа. Такође, примјетимо да израз десно од једнакости у формули има тачно k фактора.

Примјер 5.1.4. У разреду са n = 26 ђака, бирамо њих k = 3: предсједника, секретара и благајника. Претпоставка је да ученик не може имати двије функције. Поставља се питање на колико начина можемо направити овај избор, тј. зашто је број варијација од 26 елемената треће класе једнак

$$V_3^{26} = 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15\ 600?$$

Објашњење: Рецимо, прво бирамо предсједника одјељења. Бирамо једног од 26 равноправних кандидата. Затим бирамо секретара. Бирамо једног од осталих 25 равноправних кандидата. Затим бирамо благајника. Бирамо једног од преосталих 24 кандидата. То је тачно 26·25·24 начина бирања.♦

Примјер 5.1.5. На колико различитих начина можемо извући четири карте из шпила Мађарица?

Рјешење: У нашим крајевима су познате играће карте, тзв. Мађарице. Шпил се састоји од 32 карте, по 8 у свакој боји. Боје су жир (треф), зелена (пик), црвена (херц) и бундева (каро). У свакој боји су по једна од ознака VII (7), VIII (8), IX (9), X (10), дечко,

дама, краљ и ас. Оне се називају и карте за шнапс, али је код нас најпопуларнија картарошка игра са овим картама белот.

Прву карту из шпила од n = 32 можемо извући на један од 32 различита начина. За другу карту имамо 31 могућност, за трећу 30, а за посљедњу, четврту (k = 4) имамо преосталих 29. Број ових начина бирања је

$$V_4^{32} = 32\cdot 31\cdot 30\cdot 29 = 863040 .♦$$

Резиме 5.1.6. Дат је скуп $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$.

Варијација без понављања k-те класе у скупу S је свака уређена k-торка међусобно различитих елемената тог скупа. Број таквих варијација је $V_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, гдје је $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$.

Варијација са понављањем k-те класе у скупу S је свака уређена k-торка елемената тог скупа. Број таквих варијација је $\overline{V_k^n} = n^k$.♦

Задаци[18] 5.1.9.

1. Дат је скуп $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Образовати све двоцифрене (троцифрене) бројеве са различитим цифрама које припадају скупу A.

2. Девет кандидата, један по један полажу усмено испит из математике. Првог дана полаже пет кандидата. На колико различитих начина се може направити распоред полагања испита првог дана?

3. На команду „збор“, 12 ученика се на произвољан начин постројава у једну врсту. На колико начина то могу учинити?

4. Колико има троцифрених бројева са различитим цифрама који се могу образовати од цифара 0, 1, 2, 3, 4?

5. Дат је скуп $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. У лексикографском поретку је abc прва варијација треће класе од свих елемената скупа A, а *fed* је посљедња.

i. Како гласи 45. варијација (у лексикографском поретку) треће класе скупа A?
ii. Како гласи 88. варијација свих 8 елемената скупа A?

[18] Др Милутин Обрадовић, др Душан Георгијевић: МАТЕМАТИКА са збирком задатака, за IV разред средње школе, 4. Издање, Београд 1994, стр. 167-177.

6. Дат је скуп $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Образовати све двоцифрене (троцифрене) бројеве са цифрама које припадају скупу A.

7. У кутији се налазе 4 различито обојене куглице *a*, *b*, *c*, *d*. Из кутије извлачимо једну по једну куглицу са враћањем у кутију послије сваког извлачења. При томе региструјемо ознаку куглице и редосљед извлачења. Ако смо из кутије извукли три куглице, одредити број свих могућих резултата таквог извлачења.

8. Дат је скуп $S = \{1, 2, 3\}$. Одредити број свих шестоцифрених бројева у чијем се запису цифра 1 појављује два пута, цифра 2 три пута, а цифра 3 једном.

9. Колико има троцифрених бројева који се могу образовати од цифара 0, 1, 2, 3, 4?

10. На колико начина можемо распоредити 4 рјечника енглеског, 3 рјечника француског и 2 рјечника њемачког језика ако се налазе на полици један до другог? При томе не разликујемо рјечнике истог језика.

5.2. Пермутације

Бијективно пресликавање скупа А на самог себе назива се **пермутација**.

На примјер, пермутација скупа $A = \{1,2,3,4\}$ је функција $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Скраћено, ову пермутацију пишемо 2413. Пимјетимо да је пермутација посебан случај варијације без понављања.

Пермутације (без понављања) су варијације (без понављања) свих елемената датог скупа. Другим рјечима, пермутације су варијације од n елемената n–те класе. Број тих распореда је V_n^n, што пишемо $P(n)$, P_n, или $n!$. Посљедњи наведени запис („ен-ускличник“) читамо **ен-факторијел**, а његову вриједност називамо **факторијел**. Дакле

$$n! = V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Функција факторијел веома брзо расте, брже од било којие експоненцијалне функције. За процјену њене вриједности, за велико n, користи се **Стирлингова формула**

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Већ за $n = 8$ грешка ове формуле је само 1,04%, а за веће је све мања.

Примјер 5.2.1. На колико начина могу бити поредане карте за покер у шпилу ?

Рјешење: Шпил играћих карата за покер садржи 52 карте, по тринаест, са вриједностима: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (џокер), Q (краљица), K (краљ) и A (ас), у свакој од четири боје: лист (♠ -пик), дјетелина (♣-треф), срце (♥ -херц) и дијамант (♦ -каро).

Распоред карата у шпилу је једна пермутација карата. Мјешањем карата се од једне пермутације карата добија друга пермутација карата. Шпил карата за покер има $n = 52$ карте па има

$$n! \approx \sqrt{2\pi \cdot 52}\left(\frac{52}{2{,}71828}\right)^{52} = 8 \cdot 10^{67}. \blacklozenge$$

Обратно, број варијација од n елемената k–те класе изражен помоћу факторијела је

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

На примјер, пет различитих књига можемо поредати једну до друге на полици на пет факторијел начина, тј. имамо $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ пермутација (без понављања).

Прецизније речено, нека је дат скуп $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ са n елемената и природан број k, такав да је $1 \le k \le n$.

Варијација без понављања скупа A од n елемената класе k (или k -те класе) је је низ од k различитих елемената скупа A. У случају $k = n$ ову варијацију називамо **пермутацијом** без понављања скупа A.

Теорема 5.2.2. Нека је дат скуп од $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ од n елемената. Нека V_k^n представља број свих варијација класе k тог скупа, нека је P_n ознака броја свих пермутација, а C_k^n број свих комбинација класе k од n елемената ($1 \le k \le n$). Тада је:

a) $V_k^n = n(n-1)...(n-k+2)(n-k+1)$,
b) $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$,

Доказ: a) Сваки (уређени) низ се састоји од k различитих елемената из скупа S који има n елемената. При формирању низа, први елеменат се може бирати на n различитих начина, други на n – 1 начина (јер је први већ изабран), трећи на n – 2 начина (различити од прва два), и тако даље, k-ти елеменат на $n - (k - 1) = n - k + 1$ начина. Број свих варијација је производ свих ових начина бирања. b) слиједи непосредно из a) за $k = n$.♦

Примјер[19] **5.2.3.** На колико се начина могу поредати у низ бројеви 1, 2, 3, ..., 2n тако да сви парни бројеви буду на парним мјестима?

[19] Др Ратко Тошић: КОМБИНАТОРИКА, ПМФ Нови Сад, 1998.

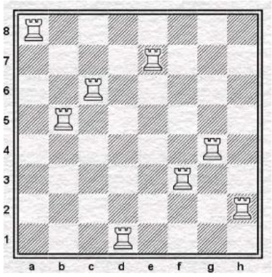
Рјешење: Парни бројеви се могу распоредити на парна мјеста (друго, четврто, ...) на $n!$ начина. Сваком таквом распореду парних бројева одговара $n!$ начина распоређивања n непарних бројева на непарна мјеста (прво, треће, ...). Зато је тражени, укупан број распоређивања $n!\cdot n! = (n!)^2$.♦

Примјер 5.2.4. На колико начина n особа могу да стану у врсту, а да при томе двије уочене особе не буду једна поред друге?

Рјешење: Нека су уочене особе a и b. Одредимо прво број распореда (пермутација) у којима су те особе једна поред друге. Имамо двије могућности, када је особа a лијево од особе b, и обрнуто. У оба случаја број пермутација је $(n-1)!$, јер се (читав) пар можепосматрати као један елеменат у пермутацији од $n-1$ елемената. Дакле, укупан број пермутација у којима су собе a и b једна поред друге је $2(n-1)!$. Отуда је број тражених распореда $n! - 2(n-1)! = (n-2)[(n-1)!]$.♦

Примјер 5.2.5. На колико начина се на шаховску таблу може поставити 8 топова, тако да међу њима не постоје два у истој врсти или истој колони?

Рјешење: Уочимо један распоред 8 топова који испуњава наведени услов. Нека је i_1 позиција топа у првој колони (тј. број врсте запосједнутог поља), са i_2 позиију другог топа, ..., са i_8 позицију осмог топа у осмој колони. Рјеч $i_1i_2...i_8$ је пермутација бројева 1, 2, ..., 8 (међу бројевима $i_1, i_2, ..., i_8$ не постоје два једнака, јер би онда имали два топа у истој врсти). Обрнуто, ако је $i_1i_2...i_8$ нека пермутација бројева 1, 2, ..., 8, тада њој одговара јединствен распоред међусобно ненападајућих топова. На слици лијево је распоред топова који одговара пермутацији 85617342. На основу успостављене бијекције слиједи да је тражени број распореда једнак 8! = 40 320.·♦



Варијација са понављањем класе k је низ $x_1x_2\ldots x_k$ ($x_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, k$) код кога неки чланови могу бити међусобно једнаки. Уколико се у наведеном низу појављују сви елементи скупа A, и то a_1 тачно k_1 пута, a_2 тачно k_2 пута, ..., a_n тачно k_n пута (па је $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$), такав низ називамо **пермутацијом са понављањем** скупа A (од n елемената) класе k.

Примјетимо да је код пермутације са понављањем $k > n$ и мора се знати колико пута се сваки елеменат понавља. Друго, овдје се не бавимо са комбинацијама са понављањем.

Теорема 5.2.6. Нека је дат скуп од $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

а) Ако са $\overline{V_k^n}$ означимо број свих варијација са понављањем класе k ($k > 1$), тада је

$$\overline{V_k^n} = n^k .$$

b) Ако $P_{k_1,k_2\ldots,k_n}^n$ означава број свих пермутација са понављањем скупа A, код којих се елеменат a_1 појављује (понавља) k_1 пута, елеменат a_2 се појављује k_2 пута, ... елеменат a_n се појављује k_n пута, тада је

$$P^n_{k_1,k_2,\dots,k_n} = \frac{(k_1+k_2+\dots+k_n)!}{k_1!k_2!\dots k_n!}.$$

Доказ:

а) На првом мјесту у низу (први члан низа) $x_1x_2\dots x_k$ може бити било који од n елемената, независно од осталих чланова низа. Исто важи за сва остала мјеста у низу (за остале чланове низа). Према томе, укупан број варијација таквог низа је $\underbrace{n\cdot n\cdot\dots\cdot n}_{k} = n^k$.

b) Када би сви чланови пермутације били различити, тада би то била пермутација без понављања од $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ елемената, а њихов укупан број био би $(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!$. Међутим, код сваке пермутације са понављањем можемо мијењати мјеста члановима (i = 1, 2, …, n) који су једнаки a_i, а да се пермутација не промјени Таквих размјештања има $k_i!$. Дакле, за сваку пермутацију са понављањем имамо $k_1!k_2!\dots k_n!$ пермутација без понављања у којима се не мјења међусобни распоред различитих чланова скупа A. Мјењајући и такве распореде добили бисмо укупан број пермутација без понављања од $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ елемената. Отуда

$$k_1!k_2!\dots k_n!P^n_{k_1,k_2,\dots,k_n} = (k_1+k_2+\dots+k_n)!.\blacklozenge$$

На примјер, $\overline{V_2^3} = 3^2 = 9$ и $P^3_{2,2,1} = \frac{(2+2+1)!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{5!}{2\cdot 2\cdot 1} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4} = 30$, што је лако провјерити набрајањем.

Примјер 5.2.7. Колико има троцифрених бројева који се могу образовати од цифара 0, 1, ..., 6?

Рјешење: Цифре у запису броја не морају бити исте, па је њихов број $\overline{V_3^7} = 7^3 = 343$ минус број варијација који почиње цифром 0, којих има $\overline{V_2^7} = 7^2 = 49$. Према томе, тражених бројева има укупно $\overline{V_3^7} - \overline{V_2^7}$ = 343 – 49 = 294.♦

Примјер 5.2.8. Колико се различитих (нових) регистарских таблица може издати у БиХ?

Рјешење: Регистарске ознаке за возила у БиХ (од 28.09.2009.) састоје се од плавог поља са скраћеницом БиХ на лијевој страни и седам знакова (пет бројева и два слова) у сљедећој форми **X00 - X - 000**. Слова која се користе на регистарским ознакама су А, Е, Ј, К, М, О, Т. То су велика штампана слова која су иста у ћириличном и латиничном писму. Слова има 7, које се као и 10 цифара могу понављати. То су варијације са понављањем.

Број варијација ових таблица је 7·10·10·7·10·10·10 = 4 900 000.♦

Примјер 5.2.9. На колико начина може 11 витезова сјести око округлог стола?

Рјешење: Једног витеза фиксирамо, а остали сједну на 10! начина.♦

Примјер 5.2.10. Колико анаграма има ријеч МАМА?

Рјешење: То су пермутације са понављањем. Добијамо $P_{2,2}^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$. Лексикографски, оне су

ААММ, АМАМ, АММА, МААМ, МАМА, ММАА.♦

Примјер 5.2.11. Колико се седмоцифрених бројева може записати тако да се цифра 2 употреби три пута, а цифра 5 четири пута?

Рјешење: $\frac{7!}{3!4!} = 35$.♦

Задаци 5.2.12.

1. Написати све варијације са понављањем 5. класе од два елемента.

2. Написати првих петнаест варијација са понављањем 5. Класе од 3 елемента.

3. Колико има седмоцифрених бројева чије су три цифре једнаке 2, двије цифре једнаке 3 а двије цифре једнаке 4?

4. Колико има шестоцифрених бројева чије су три цифре једнаке 0, двије цифре једнаке 1 и једна цифра једнака 2?

5. Одредити 2014. Пермутацију у лексикографском поретку од полазне *aaabcdeee*.

6. Колико пермутација са понављањем можемо направиги од скупа *A* = {1, 2, 3} ако се сваки елеменат понавља 2 пута?

5.3. Комбинације

Комбинација скупа A од n елемената класе k је је подскуп скупа A са k елемената.

Теорема 5.2.1. Нека је дат скуп од $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ од n елемената. Нека V_k^n представља број свих варијација (без понављања) класе k тог скупа, а C_k^n број свих комбинација класе k од n елемената ($1 \le k \le n$). Тада је

$$C_k^n = \frac{V_k^n}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Доказ: Од једне комбинације $x_1x_2\dots x_k$ класе k могли бисмо промјеном поретка чланова добити $k!$ пермутација скупа $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Дакле, тада је $C_k^n \cdot k! = V_k^n$, што је и требало доказати.♦

Примјер 5.2.2. У кутији се налази 9 куглица означених цифрама 1, 2, ..., 9. Истовремено извлачимо 3 куглице. Колико има различитих резултата извлачења?

Рјешење: То су комбинације 3. класе од 9 елемената и има их $C_3^9 = \frac{V_3^9}{3!}$ = $\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 84$.♦

Примјер 5.2.3. Наћи у лексикографском поретку 52. комбинацију 3. класе елемената 1, 2, ..., 9.

Рјешење: Укупан број комбинација (примјер 5.2.2.) је $C_3^9 = 84$. Елементом 1 почиње укупно $C_2^8 = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2} = 28$ комбинација. Бројем 2 почиње $C_2^7 = 21$ комбинација. Укупно, са 1 и 2 почиње 28 + 21 = 49 комбинација. Сљеде комбинације 50. (345), 51. (346) и 52. (347). Дакле, тражена комбинација је 347.♦

Примјер 5.2.4. Колико је начина да се извуче један листић лота 39/7 ?

Рјешење: Лото 39/7 има 39 бројева, од којих бирамо 7 различитих. При извлачењу, рецимо нумерисаних куглица редосљед извлачења није битан (извлачи се једна по једна куглица без враћања), па имамо комбинације 7. класе од 39 бројева. Њих има укупно $C_7^{39} = \frac{39\cdot 38\cdot ...\cdot 33}{7!} =$ $15\ 380\ 937$.♦

Примјер 5.4.5. На колико начина можемо распоредити 3 рјечника њемачког, 4 рјечника француског и 5 рјечника енглеског језика ако се налазе на полци један поред другог?

Рјешење: Имамо низ од 3 + 4 + 5 = 12 чланова у коме су 3 члана једне врсте (једнака су), 4 члана друге, а 5 чланова треће. Имамо 3 елемента, од којих се један понавља 3 пута, други 4 пута , а трећи 5 пута, па имамо пермутације са понављањем. Њихов број је $P_{3,4,5}^3$ = $\frac{(3+4+5)!}{3!\cdot 4!\cdot 5!}$ = 27 720.♦

Задаци 5.4.6.

1. Написати све различите начине избора три књиге из скупа од четири књиге ако нас редосљед избора књига не интересује.

2. На колико начина се од 5 књига могу изабрати 3?

3. На колико начина се од 20 људи могу формирати двије групе од по 10 људи?

4. На колико се начина 20 дјечака и 30 дјевојчица могу распоредити у двије учионице тако да у свакој буде10 дјечака и 15 дјевојчица?

5. На колико се (различитих) начина у један низ могу написати четири нуле и шест јединица?

6. На колико (различитих) начина се може написати низ од m и n јединица?

7. Четири брачна пара сачињавају скуп од осам особа. На колико се различитих начина може изабрати трочлана комисија из тог скупа ако:

a. У комисију могу учи било које три од наведених особа;
b. Комисија треба да има двије жене и једног мушкарца;
c. У комисији не могу истовремено бити муж и жена.

8. У равни је дато n различитих тачака. Колико је највише правих одређено тим тачкама?

9. Одредити број дијагонала конвексног n–то угла.

10. На кружници је изабрано n тачака и сваке двије тачке су спојене тетивом. При томе, не постоје три тетиве које се сјеку у истој тачки.

a. Колико има тетива?
b. Колико је тачака пресјека добијено унутар кружнице?

11. На колико се начина k независних топова може смјестити на таблу m x n, $k \le m$, $k \le n$?

5.4. Биномни коефицијенти

Дефиниција 5.4.1. Биномни коефицијент је број $\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$, који означавамо $\binom{n}{k}$, при чему је n, $k \in \mathbb{N}$, и $1 \le k \le n$. Израз $\binom{n}{k}$ читамо „n над k“, тј. „ен над ка“. Посебно $\binom{n}{0} = 1$.♦

Упоређивањем са бројем комбинација видимо да је $\binom{n}{k} = C_k^n$. Три су најважније основне особине биномних коефицијената.

Теорема 5.4.2. За биномне коефицијенте важи:

a) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,

b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

c) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Доказ: а) За и једнакост је тачна, јер је по дефиницији $\binom{n}{0} = 1$ и $0! = 1$, док је $\binom{n}{n}$ =

$\frac{n(n-1)...(n-n+1)}{n!}$ = 1. Нека је $1 \le k \le n$, тада је $\binom{n}{k}$ = $\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ =

$\frac{n(n-k)...(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ = $\frac{n!}{(k!(n-k)!}$, што је и требало доказати.

b) На основу претходног, имамо $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ и $\binom{n}{n-k}$ = $\frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!}$ = $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ово је **особина симетричности** биномних коефицијената.

c) Из претходног и $k! = (k-1)! \cdot k$ слиједи $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ = $\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$ =

$\frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right)$ = $\frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(k+1)(n-k)}$ = $\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$ =

$\frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!}$ = $\binom{n+1}{k+1}$. Ово је **правило сабирања** биномних коефицијената.♦

Комбинације са понављањем од *n* елемената *k*-те класе, које претходно нисмо помињали, израчунавамо по формули $\overline{C_k^n} = \binom{n+k-1}{k}$.

Примјер 5.4.3.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

C_3^5 (без понављања)

123	234	345
124	235	
125	245	
134		
135		
145		

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$\overline{C_3^4}$ (са понављањем)

111	222	333	444
112	221	331	441
113	223	332	442
114	224	334	443
123	234	341	
124			

Израчунавањем добијамо $C_3^5 = \binom{5}{3}$ = $\frac{5!}{3!(5-3)!}$ = $\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(3\cdot2\cdot1)\cdot(2\cdot1)}$ = 10 и $\overline{C_3^4} = \binom{4+3-1}{3}$ = $\binom{6}{3}$ = $\frac{6!}{3!(6-3)!}$ = 20, што се слаже са сликом.♦

Претходни теорем помаже разумјевању **Паскаловог троугла**. Формирајмо низове биномних Коефицијената као на слици лијево. Примјетимо да је између два коефицијента једног реда у следећем реду њихов збир, према c) теореме (5.4.2). Такође, лијево и десно имамо симетрију вриједности коефицијената, према b) теореме. Коначно, помоћу a) израчунавамо вриједности коефицијената и добијамо:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad\binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\quad\binom{5}{1}\quad\binom{5}{2}\quad\binom{5}{3}\quad\binom{5}{4}\quad\binom{5}{5}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Тако добијамо познати **Паскалов троугао**, о коме постоје записи у Кини, Индији, Перзији, већ од 10. вијека, а који је француски математичар Блез Паскал поново открио 1665. године. Паскалов рад је објављен тек након његове смрти, али је исте 1665. године енглески математичар Исак Њутн употребио биномне коефицијенте за **биномни развој**, као на слици лијево. Уопште, **Њутнова формула** је

...

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

...

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k .$$

Ево доказа за наведену Њутнову формулу, методом математичке индукције, сличне методи коју је употребио багдадски математичар Ал-Караји у 10. вијеку:

Њутнова формула је очигледно тачна за n = 0, јер тада можемо писати $(a + b)^0 = 1\cdot(ab)^0$, што је тачно, свеједно да ли је у загради десно од једнакости a или b. Примјетимо да је Њутнова формула тачна и за n = 1, јер је $(a + b)^1 = a + b$.

Сада претпоставимо да је Њутнова формула тачна за дати број n, па докажимо да је она тачна и за n + 1. Из

$$(a+b)^{n+1} = a(a+b)^n + b(a+b)^n ,$$

сљеди да у развоју ових полинома за њихове коефицијенте важи

$$[(a+b)^{n+1}]_{jk} = [(a+b)^n]_{j-1,k} + [(a+b)^n]_{j,k-1},$$

гдје је $[f(a,b)]_{jk}$ коефицијент испред $a^j b^k$ у полиному $f(a,b)$. Примјетимо да је $j+k=n$ за коефицијент $\binom{n}{k}$. Ако је $j+k=n+1$, тада је $(j-1)+k=n$ и $j+(k-1)=n$, па на десној страни због претходне теореме имамо $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$. Међутим, ако је $j+k\neq n+1$, тада је $(j-1)+k\neq n$ и $j+(k-1)\neq n$, па добијамо 0 + 0 = 0. Отуда

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k,$$

чиме је доказ Њутнове формуле индукцијом завршен.

Сјетимо се да и даље важи да је $\binom{n}{k} = C_k^n$ број подскупова са *k* елемената у скупу *A* са *n* елемената.

Примјер 5.4.4. Свих подскупова датог скупа A са n елемената има 2^n.

Доказ: Дакле, доказујемо да партитативни скуп $P(A)$, скуп свих подскупова скупа A, има 2^n елемената. То ћемо урадити на два начина.

1. Начин. Произвољан елеменат скупа *A* или јесте или није елеменат неког подскупа. То су двије могућности за сваки од *n* елемената и укупно 2^n могућности за цијели скуп *A*.

2. Начин. Посдскупова скупа A са k = 0, 1, 2, …, n елемената има $\binom{n}{k}$, а свих подскупова, тј. елемената скупа $P(A)$ има $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$. Ако у Њутновом биномном образцу ставимо *a* = *b* = 1, слиједи

$(1+1)^n$ = $\binom{n}{0}\cdot 1^n + \binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot 1^1 + ... + \binom{n}{n-1}\cdot 1^1\cdot 1^{n-1} + \binom{n}{0}\cdot 1^n$ = $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$. Према томе, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, што је и требало доказати.♦

Примјер 5.4.5. Показати да је $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+...+(-1)^n\binom{n}{n}=0$.

Рјешење: Замјењујући у биномном развоју *a* = 1 и *b* = -1, добијамо $(1-1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot(-1)^k$, одакле $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$. ♦

Примјер 5.4.6. Наћи 13. члан у развоју бинома $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{15}$.

Рјешење: Из $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}\cdot 2^{\frac{15-k}{2}}\cdot 3^{\frac{k}{3}}$, тринаести сабирак добијамо за $k=12$. Дакле,

$$T_{13}=\binom{15}{12}\cdot 2^{\frac{15-12}{2}}\cdot 3^{\frac{12}{3}}=\binom{15}{12}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 81=73710\sqrt{2}.$$ ♦

Задаци 5.4.7.

1. Доказати $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=n(n+1)$.

2. Колико има троуглова чије дужине страница имају вриједности у скупу {5, 6, 7, 8}?

3. Број комбинација са понављањем друге класе од x елемената износи 276. Израчунати *x*.

4. Математичком индукцијом доказати $(2n)!!=n!\cdot 2^n$, гдје је $(2n)!!=2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)$, производ свих парних бројева до закључно са наведеним.

5. Доказати да је:

1. $n\binom{2n}{n}=(n+1)\binom{2n}{n+1}$,
2. $\binom{n}{k+1}+2\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+2}{k+1}$,
3. $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}=\binom{n+3}{n+1}$,
4. $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\ldots+\binom{n+m}{m}=\binom{n+m+1}{m}$.

6. Одредити *m* и *n* знајући да је $\binom{n+1}{m+1}:\binom{n+1}{m}:\binom{n+1}{m-1}=5:5:3$.

7. Рјешити једначину $\binom{n}{3}+\binom{n}{2}=8\binom{n}{1}$ у скупу природних бројева.

[7]

8. Развити биномним образцом $(1-3x)^4$.

9. Наћи 11. члан у развоју бинома $(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})^{15}$.

10. Одредити коефицијент уз x^8 у развоју бинома $(3+x)^{12}$.

[40095]

11. Одредити коефицијент уз x^7 у развоју бинома $\left(\frac{2}{x}+3x\right)^{15}$.

[$\binom{15}{4}\cdot 2^4\cdot 3^{11}$]

12. Наћи члан који не садржи *x* у развоју бинома $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt{x}\right)^{16}$.

[седми члан]

13. Наћи онај члан који не садржи *x* у развоју $\left(\sqrt[3]{x^2}-x^{-1}\right)^{15}$.

[седми члан]

14. Наћи онај члан који не садржи *x* у развоју $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8}$.

[пети члан]

15. Одредити средњи члан у развоју бинома $\left(\frac{2}{x}-\sqrt{x}\right)^{16}$.

[$3294720x^{-4}$]

16. Наћи пети члан у развоју бинома $\left(2x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)^{8}$.

[$1120x^{\frac{22}{3}}$]

17. За коју вриједност x је збир трећег и петог члана бинома $\left(\sqrt{2^x}+2^{-\frac{x-1}{2}}\right)^n$ једнак 135, ако је збир коефицијената посљедња два члана 22.

[n = 6, x = -1 и x = 2]

18. Диференцирањем или интегрирањем развоја $(1+x)^n$ израчунати збирове:

1. $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}$,
2. $\frac{\binom{n}{0}}{1}+\frac{\binom{n}{1}}{2}+\frac{\binom{n}{2}}{3}+\ldots+\frac{\binom{n}{n}}{n+1}$.

6. Вјероватноћа

Прва интересовања за законитости случајних појава јављају се у X и XI вијеку у вези са хазардним играма, а затим са потребама осигурања. Рађање теорије вјероватноће се десило са радовима француза Блеза Паскала (1623-1622, Пјера де Ферме (1601-1655) и холандског математичара Кристијана Хајгенса (1629-1695). Швајцарски математичар Јакоб Бернули (1654-1705) је откио данас чувени закон великих бројева у својој књизи „Вјештина предвиђања“ .

У XVIII вијеку били су значајни радови Абрахама де Муавра (1667-1754), затим Пјера Лапласа (17429-1827), Карла Гауса (1777-1855). Други математичари који су у том периоду у овој области дали велики допринос били су Т. Бајес (1702-1763), Л. Ојлер (1707-1788), Пуасон (1781-1840) и други.

У другој половини XIX вијека примат у развоју теорије вјероватноће над Западном Европом преузима Русија. Прво су се појавили Буњаковски и Остроградски, а на њиховом учењу Пафнути Чебишев (1821-1894), затим Андреј Марков (1856-1922) и Александар Љапурнов (1858-1918). Први је познат по открићу законитости повезаних низове случајних догађаја (Марковљеви ланци), а други по „централној граничној теореми“. Захваљујући Русима, вратио се интерес за теоријом вјероватноће у Европу и Америку током XX вијека.

Систем аксиома Теорије вјероватноће коначно је дао руски математичар А. Н. Колмогоров 1933.

6.1. Случајни догађај

Теорија вјероватноће се бави изучавањем законитости разних случајних процеса и догађаја. Полазећи од скупа недефинисаних објеката, помоћу одређених правила, развија се математичка теорија која одговара нашем интуитивном схватању вјероватноће. Овдје ћемо прво видјети шта је то интуитивно поимање догађаја, а затим и вјероватноће.

Случајни опит је експеримент, или појава чији исход се не може са сигурношћу предвидјети, а који се под истим околностима може поновити неограничен број пута. **Случајан догађај** је онај који се у датом случајном опиту може десити, или се не десити, без треће могућности. У даљем тексту, за све опите, или догађаје сматрамо да су случајни.

Основни појам теорије вјероватноће, који се као такав и не дефинише, је **елементарни догађај**. Скуп могућих исхода (реализација) неког **опита** или појаве назива се скуп елементарних догађаја или и **простор** случајних догађаја (*sample space*) , или простор узорка.

Примјер 6.1.1. Случајни догађај је бацања два новчића.

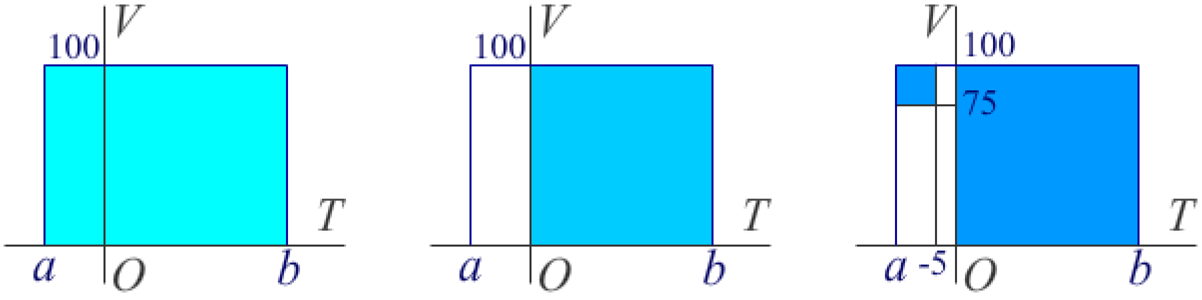
Скуп могућих догађаја код бацања једног новчића је глава-Г и писмо-П, а можемо га записати овако $S_1 = \{Г, П\}$. Скуп могућих исхода код бацања два новчића је

$$S_2 = \{(Г, Г), (Г, П), (П, Г), (П, П)\}.$$

Скуп S_2 је простор случајних догађаја бацања два новчића.♦

Примјер 6.1.2. На датом мјесту региструјемо температуру *T*° и влажност *V*% ваздуха. Скуп случајних догађаја је скуп тачака (*T*,*V*). Сликма су дати догађаји у случајевима:

a. $a \le T \le b$, $0 \le V \le 100$; **b.** T> 0, , $0 \le V \le 100$; **c.** ($a \le T \le -5° \wedge V \ge 75\%$) $\vee$ ($0 \le T \le b$) .



Нека су дати случајан догађај *A* и подскуп *Q* који садржи све елементарне догађаје којим се *A* дефинише, тада је *Q* **сигуран** (или извјестан) догађај. Празан подскуп, скуп без елемената $\varnothing$, је немогућ **догађај**.

За сваки догађај A постоји њему **супротан** догађај $\overline{A}$ који се реализује само ако се A не реализује. Догађај $\overline{A}$ је у простору догађаја из којег је изузет догађај A. Називамо га и негација догађаја A.

Унија $A \cup B$ (или **производ** *AB*) два догађаја *A* и *B* је догађај који се реализује када се реализује бар један од догађаја *A*, *B*.

Пресјек $A \cap B$ (или **збир** *A* + *B*) два догађаја је догађај који се реализује ако се реализују оба дата догађаја. Догађаји су **дисјунктни**, или искључиви ако је њихов пресјек немогућ догађај. Дакле, *A* и *B* су дисјунктни само ако је $A \cap B = \varnothing$. Догађај $\varnothing$ је немогућ јер $A \cap \overline{A} = \varnothing$, а A и $\overline{A}$ се међусобно искључују.

Разлика два догађаја $A \backslash B$ је догађај који се реализује када се реализује догађај *A*, а не реализује се догађај *B*.

Примјер 6.1.2. Експеримент се састоји у бацању коцке чије су стране означене од 1 до 6.

Када се коцка баца једном, елементарни догађаји су ω_1 – пад јединице, ω_2 – пад двојке, ..., ω_6 – пад шестице. Скуп елементарних догађаја је $Q = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Догађај: пад парног броја је $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, пад непарног броја је $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, пад броја већег од 4 је $C = \{\omega_5, \omega_6\}$. Тада је $A \cup B = Q$, $B \cup C = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}$, $B \cap C = \{\omega_5\}$, $\overline{A} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} = B$.♦

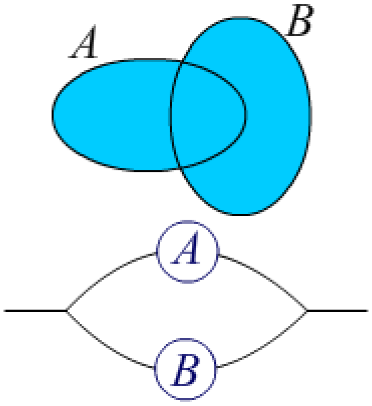
Примјер 6.1.3. Доказати да важе тзв. **Де Морганове формуле** за произвољне догађаје:

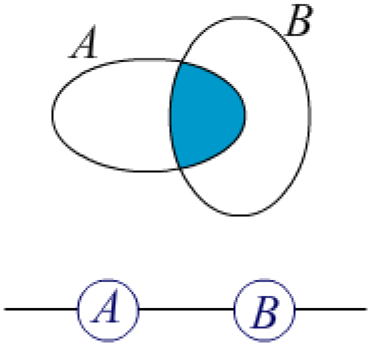
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

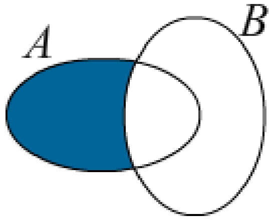
Доказ: Супротан догађају $A \cup B$ је догађај $\overline{A \cup B}$, који се оствари када се први не оствари, што онда значи да се ниједан од догађаја A и B не оствари, тј. када се остваре оба $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Ово посљедње се дешава управо када и $\overline{A} \cap \overline{B}$. Тиме је доказана прва Де Морганова формула. Друга се доказује слично.♦

Слично скуповима, случајне догађаје представљамо дијаграмима.

Унија $A+B$	Пресјек AB	Разлика $A\setminus B$



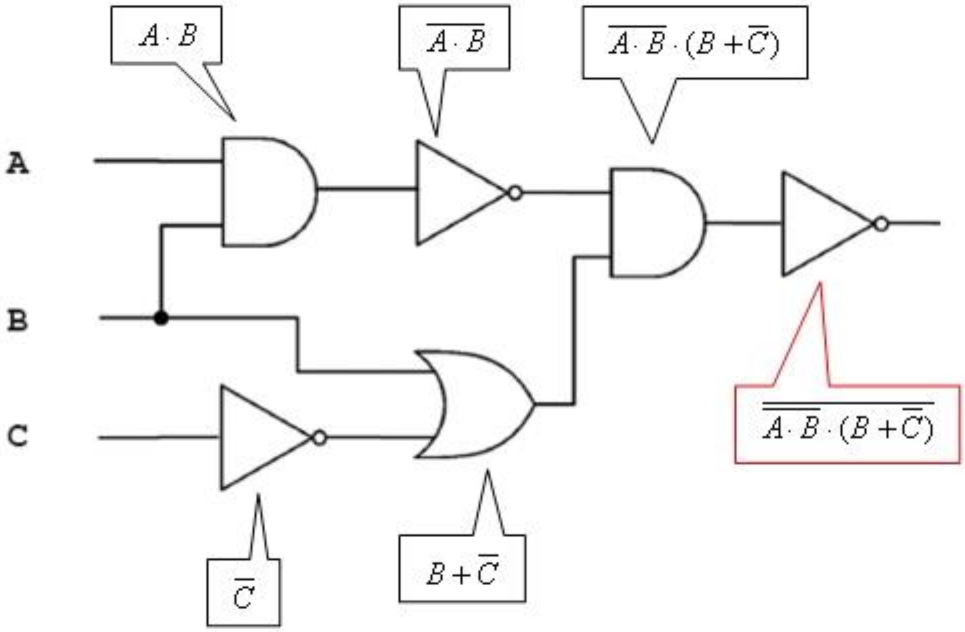




Разлика скупова се може представити формулом помоћу пресјека и негације

$$A \setminus B = A\overline{B}.$$

Случајни догађаји се могу представљати и помоћу логичких склопова, као на сљедећој слици.



Нека су *A* и *B* случајни догађаји. Ако се при сваком остваривању догађаја *A* остварује и догађај *B*, тада кажемо да догађај *A* **повлачи**, или имплицира догађај *B*, односно да догађај *B* **садржи**, или обухвата догађај *A*, и то означавамо $A \subset B$. Када је $A \subset B$ и $B \subset A$, тада кажемо да су догађаји *A* и *B* **једнаки** и пишемо *A* = *B*.

Задаци 6.1.5.

1. Описати простор случајних догађаја, ако је случајни експеримент:

1. број „глава“ у два бацања новчића,
2. број позива на телефонској централи у одређеном интервалу времена,
3. количина воде у боци од једне литре.

2. Бацају се двије коцке одједном. Догађај је да збир бројева буде 4 или 6, и други да је производ бројева 4 или 6. Наћи збир тих догађаја.

3. Производе се артикли на једној производној траци. Региструје се број дефектних артикала у дневној производњи. Описати скуп свих могућих исхода.

4. Дата су четири слова *a*, *b*, *c*, *d*. Исход опита је поредак у којем се та слова појављују. Нека је *A* догађај: „a је на првом мјесту“, и *B* је догађај: „*b* није на другом мјесту“.

1. Описати скуп свих могућих исхода.
2. Набројати све исходе догађаја $A + B$.
3. Набројати све исходе догађаја AB.
4. Исто за догађај $A \backslash B$.

5. Догађај *A* је да збир бројеве двије бачене коцке буде паран, а догађај *B* је да је њихов производ паран. Наћи $A \cup B$.

6. Показати да за произвољне случајне догађаје *A*, *B*, *C* и простор случајних догађаја *E* важи:

1. $A + A = A$,
2. $A + E = E$,
3. $A + \varnothing = A$,
4. $A + B = B + A$,
5. $(A + B) + C = A + (B + C)$.

7. У продавници се налазе сијалице из двије фабрике. Догађај *A* је да је случајно изабрана сијалица из прве фабрике. Догађај *B* је да је сијалица исправна. Шта значе сљедећи догађаји:

$$\overline{A},\ A+\overline{A},\ A\overline{A},\ AB,\ A+B,\ A\overline{B},\ \overline{A}B,\ A\setminus B,\ A\setminus\overline{B},\ \overline{A}\setminus B,\ \overline{A}\setminus\overline{B}.$$

8. Показати да за произвољне случајне догађаје *A*, *B*, *C* и простор случајних догађаја *E* важи:

1. $AA = A$,
2. $AE = A$,
3. $A\varnothing = \varnothing$,
4. $AB = BA$,
5. $(AB)C = A(BC)$,
6. $A(B + C) = AB + AC$.

9. Нека су *A*, *B*, *C* три догађаја везана за неки опит. Изразити помоћу њих догађаје:

1. Да се тачно један од догађаја *A*, *B*, *C* реализује;
2. Да се тачно два од догађаја *A*, *B*, *C* реализују;
3. Да се не више од два догађаја *A*, *B*, *C* реализују.

6.2. Вјероватноћа

При **понављању** датог случајног догађаја *A*, прије или касније се дешавају његове реализације, са одређеним правилностима које леже у основи Теорије вјероватноће. Те правилности се садрже у сљедећем.

Нека се одређени опит понавља у неизмјењеним условима n_0 пута, а нека је $n(A)$ број опита у којима се релаизовао догађај A. Тада је $0 \le n(A) \le n_0$. Полазећи од искуства и интуиције, знамо да се **релативна учесталост** $\frac{n(A)}{n_0}$ све више групише око одређеног броја, који називамо вјероватноћа догађаја A и означавамо га $p_0(A)$. То није математичка дефиниција вјероватноће.

Примјер[20] **6.2.1.** Након 30 бацања новчића добили смо низ П, П, П, П, П, Г, Г, П, П, П, Г, Г, Г, П, Г, П, Г, Г, Г, П, П, П, П, П, П, Г, Г, П, П, П. Писмо смо добили 19 пута, а главу 11.

Да смо новчић бацали *n* = 1000 пута, имали би, рецимо 494 главе (и 506 писама). За n = 10000 имали бисмо, на примјер 5039 глава. Ако новић бацамо све више пута добијамо однос ових резултата све ближе броју 1/2. Када и како се овај однос исхода приближава тачној вриједности вјероватноће говори нам Бернулијев закон великих бројева.♦

У **Теорији вјероватноће**, вјероватноћа се формално дефинише као нумеричка функција дефинисана над пољем догађаја $\mathcal{F}$. Дакле, вјероватноћа је функција $p(.)$ која сваком догађају *A* додјељује број $p(A)$, његову вјероватноћу. Особине ове функције су одређене тако да теоријска вјероватноћа буде у складу са интуитивном представом о вјероватноћи – као центру груписања релативних учесталости.

Према томе, за свако $A \in \mathcal{F}$ је $p(A) \ge 0$, јер је $\frac{n(A)}{n_0} \ge 0$. Затим, ако је Ω простор (свих) случајних догађаја, тада је $n(\Omega) = n_0$, па треба бити $p(\Omega) = 1$. Ако су *A* и *B* дисјунктни догађаји, онда је $n(A+B) = n(A) + n(B)$, па је $\frac{n(A+B)}{n_0} = \frac{n(A)}{n_0} + \frac{n(B)}{n_0}$ за произвољан број n_0 понављања датог опита. Зато треба претпоставити да је $p(A+B) = p(A) + p(B)$.

Дефиниција[21] **6.2.2.** Вјероватноћа $p(.)$ је функција која догађаје из поља $\mathcal{F}$ пресликава у реалне бројеве, са сљедећим особинама:

[20] http://www.elemenat.com/cyr/wiki/index.php?title=Дискретна_расподјела_вјероватноћа, Низ бројева 1 и 0.

i. Ненегативност: $\forall A \in \mathcal{F},\ p(A) \ge 0$;

ii. Нормираност: $p(\Omega) = 1$;

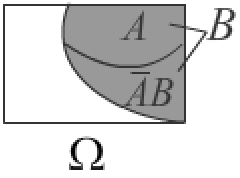
iii. Адитивност: Ако су $A_1, A_2, \dots$ дисјунктни догађаји ($A_iA_j = \varnothing,\ i \ne j$), тада је

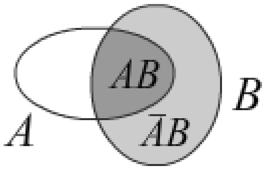
$$p\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k)\ .\blacklozenge$$

За саму теорију вјероватноће је питање како се долази до полазних вјероватноћа небитно. Она даје правила како се, полазећи од једних вјероватноћа израчунавају друге. Ево неколико таквих израчунавања.

Посљедице 6.2.3.

1. $p(\varnothing) = 0$ слиједи из $A = A + \varnothing$ те $p(A) = p(A + \varnothing) = p(A) + p(\varnothing)$.
2. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ слиједи из $A + \bar{A} = \Omega$ те $p(A) + p(\bar{A}) = p(\Omega) = 1$.
3. Ако је $A \subset B$ тада је $p(A) \le p(B)$. Слиједи из, ако $A \subset B$ тада $B = A + \bar{A}B$, на сљедећој слици лијево, те $p(B) = p(A) + p(\bar{A}B)$. Из ненегативности вјероватноће $p(\bar{A}B) \ge 0$ добијамо коначно $p(B) \ge p(A)$.
4. За свако $A \in \mathcal{F}$ је $p(A) \le 1$. Слиједи из $A \subset \Omega$ и особине 3.
5. $p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$. Слиједи из $A + B = A + \bar{A}B$ и $B = AB + \bar{A}B$, као што се види на сљедећој слици десно. Отуда је $p(A + B) = p(A) + p(\bar{A}B)$ и $p(B) = p(AB) + p(\bar{A}B)$. Елиминацијом $p(\bar{A}B)$ из наведених једнакости, добијамо тражени резултат.





Посљедња особина се лако проширује на унију[22] више од два догађаја.

Примјер 6.2.4. Доказати

$$p(A + B + C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(AB) - p(AC) - p(BC) + p(ABC).$$

[21] Zoran A. Ivković: MATEMATIČKA STATISTIKA, III izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1976.

[22] Умјесто унија скупова $A \cup B$ овдје пишемо збир догађаја $A + B$. Такође, умјесто пресјек скупова $A \cap B$ пишемо производ догађаја AB.

Доказ: из $A+B+C=(A+B)+C$, $(A+B)C=AC+BC$ и $ACBC=ABC$ слиједи
$p(A+B+C)$ = $p(A+B)+p(C)-p((A+B)C)$ = $p(A)+p(B)-p(AB)$ +
$p(C)-p(AC+BC)$ = $p(A)+p(B)+p(C)-p(AB)-p(AC)-p(BC)+p(ABC)$. ♦

Ако опит има коначно много исхода $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ онда је поље $\Im$ скуп свих подскупова скупа Ω, тј. поље $\mathcal{F}$ је партитативни скуп $\mathcal{F}$ = $P(\Omega)$ = $\{\varnothing,\omega_1,...,\omega_n,\omega_1+\omega_2,...,\omega_1+\omega_2+...+\omega_n\}$ којих има 2^n (в. Примјер 5.4.4.).

Често су сви могући исходи **једнаковјероватни**, тј. $p(\omega_1)$ = $p(\omega_2)$ = ... = $p(\omega_n)$, па из $\omega_1+\omega_2+...+\omega_n=\Omega$ слиједи $p(\omega_k)=\frac{1}{n}$ за свако k = 1, 2, ..., n. Даље, сваки догађај A једнак је збиру исхода којим је одређен $A=\omega_{k_1}+\omega_{k_2}+...\omega_{k_m}$. За ове исходе кажемо да су **повољни** за догађај A. Тада је $p(A)=p(\omega_{k_1})+p(\omega_{k_2})+...+p(\omega_{k_m})=\frac{m}{n}$. Другим рјечима, вјероватноћа догађаја A једнака је односу повољних исхода према броју свих могућих исхода. Наравно, ако су сви уочени исходи једнаковјероватни.

Примјер 6.2.5. Десет једнаких куглица, означених бројевима од 1 до 10 је помјешано у кутији. На случајан начин из кутије извлачимо двије куглице. Колика је вјероватноћа да је 10 збир бројева извучених куглица?

Рјешење: Скуп свих могућих исхода је скуп једнаковјероватних парова (*x*,*y*) бројева датих десет куглица. Таквих парова укупно има $\binom{10}{2}=45$. Повољни исходи су $A=\{(1,9),(2,8),(3,7),(4,6)\}$ и има их 4, па је $p(A)=\frac{4}{45}$. ♦

Примјер 6.2.6. Кутија садржи пет артикала. Зна се да су међу њима два дефектна. Артикли се извлаче један за другим и региструје се да ли је извучени артикал дефектан (-), или није (+). Наћи вјероватноћу да је трећи извучени артикал посљедњи дефектан који је извучен.

Извлачење				
I	II	III	IV	V
-	-	+	+	+
-	+	-	+	+
-	+	+	-	+
-	+	+	+	-
+	-	-	+	+
+	-	+	-	+
+	-	+	+	-
+	+	-	-	+
+	+	-	+	-

Рјешење: Све могуће исходе извлачења можемо представити као низове минуса (дефектан) и плусева (исправан), као у табели лијево. Њихов број, број редова табеле је

$$\binom{5}{2}=10.$$

Повољне могућности су само двије:
„– + – + +“ и „+– – + +“.
Према томе, тражена вјероватноћа је

+	+	+	-	-

$\frac{2}{10}$.♦

Примјер 6.2.7. На штандовима на пијаци, провјераване су ваге. Од 100 провјераваних вага, установљено је да 5 њих показује мању тежину од тачне (догађај *A*), да 65 вага показује тачну тежину (догађај *B*), и да 30 вага показује већу тежину (догађај *C*). Колика је вјероватноћа да ће случајно изабрана вага са пијаце показивати мању или тачну тежину?

Рјешење: $p(A + B) = p(A) + p(B) = \frac{5}{100} + \frac{65}{100} = 0{,}70$.♦

Примјер 6.2.8. Из шпила од 52 карте насумице су извучене 4 карте. Наћи вјероватноћу да ће међу њима бити бар један ас.

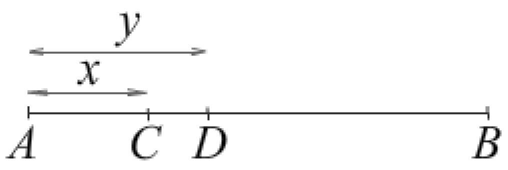
Рјешење: Нека је A догађај да је међу 4 извучене карте бар један ас. Тада је $\bar{A}$ догађај да међу те 4 карте нема нити једног аса. Број свих начина да се из шпила са 52 карте извуку било које 4 је $n(\Omega) = \binom{52}{4} = 270\,725$, а број начина да се не извуче нити једна јединица је $n(\bar{A}) = \binom{48}{4} = 194\,580$, тј. број начина да се из преосталих карата 48 без асова извуку било које 4.

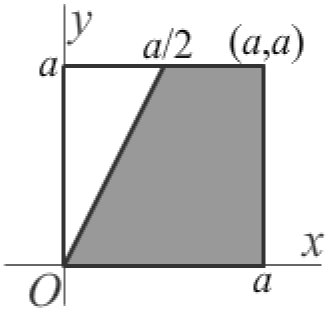
Према томе, тражена вјероватноћа је $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{194\,580}{270\,725} = 0{,}28126...$.♦

Иста метода се може примјенити и у случају **неограничено много** једнаковјероватних догађаја.

Примјер 6.2.9. На дужи AB дужине a, на случајан начин су изабране тачке C и D. Наћи вјероватноћу да тачка C буде ближа тачки D него тачки A.

Рјешење: Означимо удаљености *AC* = *x*, *AD* = *y*. Без обзира да ли је поредак тачака *A-D-C-B*, или је поредак *A-C-D-B*, као на слици десно, према услову задатка $CD < CA$, биће $|y - x| < x$. У првом случају је $y < x$, па је $x - y < x$, тј. $y > 0$. У другом случају је $y > x$, па је $y - x < x$, тј. $y < 2x$. Оба случаја можемо представити новим графом, као на сљедећој слици лијево. То је шрафирани дио квадрата странице *a*, уписаног у I квадрант превоуглог система *Oxy*.



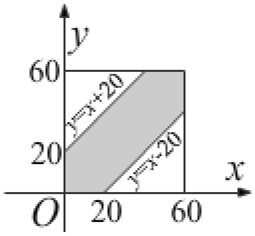


Нека је Ω скуп свих тачака из квадрата странице a. Са слике лијево, видимо да је површина читавог квадрата $P(\Omega) = a^2$, површина нешрафираног дјела квадрата је $P(\overline{A}) = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4}$, а површина шрафираног дјела је $P(A) = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$. Према томе, вјероватноћа траженог догађаја је $p(A) = \frac{P(A)}{P(\Omega)} = \frac{3a^2/4}{a^2} = 0{,}75$.♦

Примјер 6.2.10. Њих двоје се договоре на се нађу између 1 и 2 часа и да на уговореном мјесту чекају 20 минута. Колика је вјероватноћа да ће доћи до сусрета?

Рјешење: Нека су x и y њихова времена доласка на мјесто састанка изражено у минутама након првог часа. Скуп свих тачака квадрата странице 60 је Ω. Повољан догађај A је када $|x - y| \le 20$.

$x > y$	$y > x$
$x - y \le 20$	$y - x \le 20$
$y \ge x - 20$	$y \le x + 20$
($y = x - 20$)	($y = x + 20$)



Рјешење је шрафирана површина на слици десно. Површина читавог квадрата је $P(\Omega) = 60^2 = 3600$, површина нешрафираног дјела унутар квадрата је $P(\overline{A}) = 2 \cdot \frac{40 \cdot 40}{2} = 1600$, а површина шрафираног је $P(A) = 3600 - P(\overline{A}) = 2000$.

Према томе, тражена вјероватноћа је $p(A) = \frac{P(A)}{P(\Omega)} = \frac{2000}{3600} = 0{,}56$.♦

Задаци 6.2.11.

1. Пет цифара 1, 2, 3, 4, 5 случајно су поредане у низ. Одредити вјероватноћу догађаја:

A. Цифра 3 стоји на првом мјесту.
B. Прве двије цифре су 1, 2.

2. Из шпила 52 карте извучена је једна карта. Одредити вјероватноћу догађаја:

A. Извучен је жандар каро.
B. Извучена је црна карта.
C. Извучена је пик карта.
D. Извучена је херц или треф .

3. У магацину се налази 90 производа, од којих је 12 неисправних. Колика је вјероватноћа да ћемо узимајући насумице два производа изабрати оба исправна?

4. Ако се међу 110 конзерви налази 7 покварених, колика је вјероватноћа да ћемо куповином двије конзерве добити бар једну покварену?

5. У кутији се налази 12 бијелих и 7 црних куглица. Истовремено се ваде двије куглице. Наћи вјероватноћу догађаја:

A. Извучене су куглице исте боје;
B. Извучене су куглице различите боје.

6. Из групе од 12 брачних парова случајно се бира 7 особа. Колика је вјероватноћа да међу изабранима не постоји брачни пар?

7. Два стрелца гађају мету. Вјероватноћа да први стрелац погоди је 0,65 а да други погоди је 0,70. Колика је вјероватноћа да ће мета бити погођена?

8. Три стрелца гађају мету. Вјероватноћа да први погоди је 0,7 да погоди други је 0,5 и да погоди трећи је 0,4. Колика је вјероватноћа да мета буде погођена?

9. Доказати $p\left(\bigcup_k A_k\right) \le \sum_k p(A_k)$, k = 1, 2, 3, ... (лема о покривању).

10. На случајан начин се бира једна тачка у датом квадрату. Одредити вероватноће:

A. случајно изабрана тачка се налази најближе једном датом темену квдрата;
B. случајно изабрана тачка се налази у кругу уписаном у квадрат;
C. одредити вероватноћу уније и вероватноћу пресека догађаја A и B.

резултати: 1. 24/120, 12/120; 2. 1/52, 26/52, 13/52, 13/52 + 13/52; 3. $\binom{18}{2}:\binom{90}{2}$; 4. $(\binom{7}{2}+7\cdot 103)/\binom{110}{2}$; 5. $\dfrac{\binom{12}{2}+\binom{7}{2}}{\binom{19}{2}}$, $\dfrac{\binom{12}{1}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{19}{2}}$; 6. $\dfrac{\binom{12}{7}\cdot 2^7}{\binom{24}{7}}$; 7. 0,895; 8. 0,91; 9. Слиједи из $\bigcup_k A_k = A_1 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3 + \dots$ и $\overline{A}_1 \dots \overline{A}_{j-1} A_j \subset A_j$. ♦

6.3. Условне вјероватноће

Овдје ћемо обрадити:

a. условну вјероватноћу,
b. формулу потпуне вјероватноће,
c. Бајесову формулу, и
d. независтост случајних догађаја.

a. Условна вјероватноћа

У неким случајевима, реализација догађаја A утиче на вјероватноћу догађаја B.

Условна вјероватноћа $p(B|A)$ је вјероватноћа догађаја B под условима који извјесно, или сигурно доводе до реалнизације догађаја A.

Примјер 6.3.1. Кутија садржи 120 производа од којих је 30 дефектно. На случајан начин извлачимо два производа из кутије, један па други, без враћања првог у кутију. Случајни догађаји су:

A. Први извучени производ је дефектан;
B. Други извучени производ је дефектан.

Примјетимо да вјероватноћа догађаја B зависи од тога да ли је, или није укључена реализација догађаја A. Заиста, имамо вјероватноће:

$$p(B \mid A) = \frac{29}{119} = 0{,}24\ldots,\ \ p(B \mid \bar{A}) = \frac{30}{119} = 0{,}25\ldots .\blacklozenge$$

У интуитивној представи вјероватноће, броју око кога се групишу релативне учестаности догађаја, означимо са n_A, n_B, n_{AB} број реализација догађаја A, B, AB редом, у n опита. **Релативна учестаност** догађаја B у условима који извјесно доводе до реализације догађаја A је:

$$\frac{n_{AB}}{n_A} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_A}{n}}.$$

Отуда закључујемо да **условне вјероватноће** можемо дефинисати са:

$$p(B \mid A) = \frac{p(AB)}{p(A)},\ \ p(A) > 0.$$

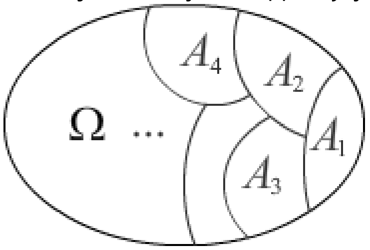
Помоћу условних вјероватноћа, **вјероватноћа производа** два догађаја је

$$p(AB) = p(A)p(B \mid A),\ \text{или}\ \ p(BA) = p(B)p(A \mid B).$$

Због комутативности производа $AB = BA$ ове вјероватноће (производа) су једнаке.

b. Формула потпуне вјероватноће

Разбијање извјесног догађаја Ω на **дисјунктне** догађаје $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ имамо када се увијек реализује један и само један догађај из датог скупа. Другим рјечима, дисјуктни догађаји $A_1, A_2, ..., A_n$ чине једно разбијање сигурног догађаја Ω ако је

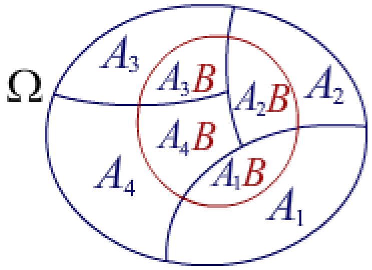


$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \Omega,$$

као на слици лијево.

Формула потпуне вјероватноће гласи: ако догађаји $A_1, A_2, ..., A_n$ чине једно разбијање догађаја Ω тада је

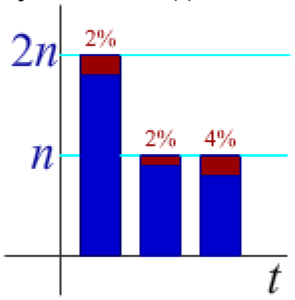
$$p(B) = \sum_{k=1}^{n} p(A_k)p(B \mid A_k) .$$



Доказ слиједи непосредно из једнакости $B = \sum_{k=1}^{n} A_k B$, или $p(B) = \sum_{k=1}^{n} p(A_k B)$. Стављајући $p(A_k B) = p(A_k)p(B \mid A_k)$ добијамо тражени резултат. Ово је корисна формула у многим израчунавањима вјероватноћа.

Примјер 6.3.2. Три фабрике производе исти артикал. Прва га производи два пута више од друге, а друга и трећа производе исти број, током одређеног временског периода. Међутим, 2% производа прве и друге фабрике су дефектни, а 4 % производа је дефектно у трећој. Сви производени артикли стижу у исто складиште, одакле на случајан начин узимамо један. Наћи вјероватноћу да је он дефектан.

Рјешење: на два начина. ***i.*** *начин*: непосредним израчунавањем укупне количине произведених исправних и неисправних артикала у току одређеног времена. На слици лијево, за одређено вријеме Δt, прва, друга и трећа фабрика произведу редом: $2n$, n и n артикала. Они произведу укупно $4n$ артикала. Међутим, дефектни су 2% од прве = $\frac{2}{100} \cdot 2n$, 2% од друге = $\frac{2}{100} \cdot n$ и 4% од треће = $\frac{4}{100} \cdot n$, што је укупно $\frac{10n}{100}$ = $n/10$ дефектних комада артикала. Према томе, ако из складишта узмемо један артикал на случајан начин, биће



p(дефектан) = $\frac{\text{дефектних}}{\text{свих}} = \frac{n/10}{4n} = \frac{1}{40}$ = 0,025.

ii. *начин*: користећи формулу потпуне вјероватноће. Ставимо да је A_k артикал из k-те (k = 1, 2, 3) фабрике. Тада је A_1, A_2, A_3 разбијање Ω. Према услову задатка је $p(A_1) = 2p(A_2)$, $p(A_2) = p(A_3)$ и наравно $p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = 1$. Отуда $p(A_1) = \frac{1}{2}$, $p(A_2) = \frac{1}{4}$ и $p(A_3) = \frac{1}{4}$. Затим, ако је догађај B : „узети производ је дефектан“, имамо $p(B \mid A_1) = p(B \mid A_2) = 0{,}02$, тј. 2%, и $p(B \mid A_3) = 0{,}04$. На основу формуле потпуне вјероватноће добијамо

$$p(B) = p(A_1)p(B \mid A_1) + p(A_2)p(B \mid A_2) + p(A_3)p(B \mid A_3) = 0{,}02 \cdot \tfrac{1}{2} + 0{,}02 \cdot \tfrac{1}{4} + 0{,}04 \cdot \tfrac{1}{4} = 0{,}025. ♦$$

c. Бајесова формула

Обрнуто питање од претходног је често интересантније: узели смо случајно из складишта артикал и констатовали да је дефектан. Колика је вјероватноћа да он потиче из дате фабрике. На примјер, колико је $p(A_1 \mid B)$? Одговор даје сљедећа формула, која се још зове и формула вјероватноће хипотеза, или узрока.

Бајесова (*Bayes*) **формула**: ако догађаји A_1, A_2, ..., A_n чине једно разбијање Ω тада је

$$p(A_j \mid B) = \frac{p(A_j)p(B \mid A_j)}{\sum_{k=1}^{n} p(A_k)p(B \mid A_k)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Доказујемо је једноставно из $p(A_jB) = p(B)p(A_j \mid B) = p(A_j)p(B \mid A_j)$ одакле $p(A_j \mid B) = \frac{p(A_j)p(B \mid A_j)}{p(B)}$, па замјењујући $p(B)$ из формуле тоталне вјероватноће, добијамо тражени резултат.

Примјер 6.3.3. У тексту прошлог примјера (6.3.2.) постављамо и обратно питање. Из складишта смо на случајан начин извукли један артикал а он је био дефектан. Колика је вјероватноћа да је тај артикал из прве фабрике?

Рјешење: $p(A_1 \mid B) = \frac{p(A_1)p(B \mid A_1)}{p(B)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}02}{0{,}025} = 0{,}4$.♦

Примјер 6.3.4. Имамо четири кутије са куглицама:

1. 3 бјеле, 2 црне, 2 плаве, 3 црвене;
2. 1 бијела, 3 црне, 5 плавих, 2 црвене;
3. 2 бијеле, 4 црне, 1 плава, 2 црвене;
4. 4 бијеле, 1 црна, 6 плавих, 3 црвене.

Извлачимо двије куглице на случајан начин. Наћи вјероватноћу да су:

A. извучене бијела и црвена куглица;
B. извучене бијела и црвена куглица из прве кутије.

Рјешење: Тражени догађај означимо са A : „извучена је бијела и црвена куглица“. Нека је догађај K_j : „одабрана је j-та кутија“ ($j = 1, \dots, 4$). Тада је $p(K_1) = \dots = p(K_4) = \frac{1}{4}$, $p(A|K_1) = \frac{3(\text{бијеле})}{10}\cdot\frac{3(\text{црвене})}{9} + \frac{3(\text{црвене})}{10}\cdot\frac{3(\text{бијеле})}{9} = \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{9} = 2\cdot\frac{9}{10\cdot 9} = \frac{1}{5}$, $p(A|K_2) = 2\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{2}{10} = \frac{2}{55}$, $p(A|K_3) = 2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{1}{9}$, $p(A|K_4) = 2\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13} = \frac{12}{91}$. Отуда $p(A) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{55} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{4}\cdot\frac{12}{91} = 0{,}1198$.

Даље, ако се десио догађај A : „извучена је бијела и црвена куглица“, тада догађај B : „извучене су из прве кутије“ има вјероватноћу $p(K_1 \mid A) = \frac{p(K_1)\cdot p(A \mid K_1)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}}{0{,}1198} = 0{,}4174$.♦

d. Независност случајних догађаја

Стохастичку, или **статистичку независност** догађаја *B* од догађаја *A* дефинишемо са

$$p(B\,|\,A)=p(B).$$

Ако је случајни догађај *B* независтан од *A* тада је

$$p(A\,|\,B)=\frac{p(AB)}{p(B)}=\frac{p(A)p(B\,|\,A)}{p(B)}=\frac{p(A)p(B)}{p(B)}=p(A),$$

па је и случајни догађај *A* независтан од догађаја *B*. Према томе, независност догађаја *A* и *B* можемо дефинисати и са

$$p(AB)=p(A)p(B).$$

Примјер 6.3.5. Коцка се баца два пута. За догађаје A : „у првом бацању пао је паран број“ и B : „у другом бацању пала је шестица“ је очигледно да су независни.♦

Примјер 6.3.6. Из шпила 32 карте случајно извлачимо једну. Посматрамо догађаје:

A. извучена карта је боје треф;
B. извучена карта је десетка.

Да ли су догађаји A и B независни?

Рјешење: није очигледно, па израчунавамо вјероватноће. $p(A)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$, $p(B)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$ и $p(AB)=\frac{1}{32}$. Дакле, $p(AB)=p(A)p(B)$, што значи да су A и B независни догађаји.♦

Уопште, када имамо $n\in\mathbb{N}$ догађаја A_1, A_2, ..., A_n они су независни ако за сваки њихов подскуп A_{k1}, A_{k2}, ..., A_{km} важи $p(A_{k1},A_{k2},...,A_{km})=p(A_{k1})p(A_{k2})...p(A_{km})$.

Примјер 6.3.7. Правилан тетраедар има једну страну обојену плаво, другу жуто, трећу црвено, а четврто са све три боје. Тетраедар се баца и региструје се боја на страни на којој је пао. Региструјемо догађаје:

A. пала је плава боја;
B. пала је жута;
C. црвена.

Да ли су догађаји A, B и C независни?

Рјешење: $p(A) = p(B) = p(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $p(AB) = p(BC) = p(AC) = \frac{1}{4}$, па имамо

$p(AB) = p(A)p(B)$, итд., али догађаји A, B и C нису независни, јер $p(ABC) = \frac{1}{4} \neq$

$p(A)p(B)p(C) = \frac{1}{8}$.♦

Дакле, независност у паровима још увијек не значи независност у случају наведене дефиниције.

Примјери[23] 6.3.8.

1. Бачена је коцка и пао је паран број. Колика је вјероватноћа да је тај број дјељив са 3?

2. У шеширу се налази 5 бјелих, 4 црне и 6 плавих куглица. Ако се случајно извуку 3 куглице, колика је вјероватноћа да све буду бијеле?

3. Бацају се два новчића на случајан начин. Посматрамо догађаје:

A. пао је грб на првом;
B. пао је бар један грб;
C. пало је бар једно писмо;
D. пао је грб на другом.

Испитати да ли су догађаји A и C, A и D, B и C, B и D, зависни или независни.

4. Радник ради на 3 аутоматске машине. Вјероватноће да током одређеног времена првој, другој и трећој машини не требају интервенције суредом: 0,8, затим 0,7 и 0,6. Колика је вјероватноћа да нити једна машина не треба интервенцију током датог времена?

5. Међу производима неке фабрике има 6% шкарта, а од производа који су добри 70% је прве класе. Колика је вјероватноћа да је случајно изабрани производ прве класе?

6. На неки испит је изашло 60% студената који полажу први пут и 40% осталих. Вјероватноћа да ће студент први пут положити испит је 0,3 а за остале 0,4. Наћи вјероватноћу да ће случајно изабрани студент положити испит.

7. У некој фабрици 30% производа произведе прва машина, 25% друга и остало трећа. Прва машина има 1% шкарта, друга 1,2%, трећа 2%. Колика је вјероватноћа да је случајно изабрани производ шкарт?

8. Баца се коцка. Ако падне 1 или 6 узима се куглица из прве кутије, у супротном узима се из друге кутије. Прва кутија садржи 3 црне, 2 бијеле и 1 зелену куглицу, а друга кутија садржи 4 бијеле и 2 зелене куглице.

[23] Ivana. Kovačević: Verovatnoća i statistika sa zbirkom zadataka, Beograd, 2011.

i. Наћи вјероватноћу да је извучена бијела куглица.
ii. Наћи вјероватноћу да је куглица из прве кутије, ако се зна да је бијела.

Рјешења: **1.** A : {3,6}, B : {2,4,6}, *p*(*A*|*B*) = (1/6)/(3/6) = 1/3. **2.** $p(A\mid B)=\binom{5}{3}/\binom{15}{3}=\frac{2}{91}$. **3.** A и C су зависни јер је *p*(C) = ¾, *p*(C|A) = 1/2; A и B су независни јер *p*(A) = ½,, *p*(A|D) = ½; B и C су зависни јер *p*(B) = ¾, *p*(B|C) = 2/3; B и D су зависни јер *p*(B) = ¾, *p*(B|D) = 1. **4.** *P*(*ABC*) = *p*(*A*)*p*(*B*)*p*(*C*) = 0,8·0,7·0,6 = 0,336. **5.** A : није шкарт, B : прва класа; *p*(A) = 0,94, *p*(B|A) = 0,70, *p*(AB) = *p*(A)*p*(B|A) = 0,94·0,70 = 0,658. **6.** Догађаји A, B : студент полаже први пут, више пута. S : студент је положио испит. P(A) = 0,6, p(B) = 0,4, p(S|A) = 0,3, p(S|B) = 0,4 и p(S) = p(A)p(S|A) + p(B)p(S|B) = 0,6·0,3 + 0,4·0,4 = 0,34. **7.** S : шкарт, а догађаји A, B, C – производи на првој, другој, трећој машини. P(A) = 0,30, p(B) = 0,25, p(C) = 0,45, p(S|A) = 0,01, p(S|B) = 0,012, p(S|C) = 0,02, па је p(S) = p(A)p(S|A) + p(B)p(S|B) + p(C)p(S|C) = 0,015. 8. A, B – изабрана је прва, друга кутија. P(A) = 2/6, p(B) = 4/6, p(X|A) = 2/6, p(X|B) = 4/6, p(X) = p(A)p(X|A) + p(B)p(X|B) = 1/5; p(A|X) = p(A)p(X|A)/p(A) = 1/5.♦

Задаци 6.3.9.

1. Коцка је бачена два пута. Зна се да је у првом бацању пао непаран број. Колика је вјероватноћа да је у оба бацања збир бројева 6?

2. У кутији се налази *m* бијелих и *n* црних куглица. Извлачимо двије куглице редом, тако да прву извучену куглицу враћамо у кутију прије извлачења друге. Наћи вјероватноћу да је друга извучена куглица црна, ако

i. зна се да је прва извучена куглица била бијела,
ii. не зна се која је била прва извучена куглица.

Наћи вјероватноћу да је друга извучена куглица црна, ако се зна да је прва била црна.

3. Показати да је $p(.|A)$, $p(A)>0$ вјероватноћа над пољем *F*, тј. да задовољава дефиницију 6.2.2.

4. Показати да је $p(A_1,A_2,...,A_n)=p(A_1)p(A_2\mid A_1)p(A_3\mid A_1A_2)...p(A_n\mid A_1A_2...A_{n-1})$.

5. Наћи $p(B)$ у примјеру 6.3.1.

6. Кутија I садржи *x* бијелих и *y* црних куглица, а кутија II садржи *u* бијелих и *v* црних куглица. Једна куглица случајно извучена из кутије I премјештена је у кутију II, а затим је из кутије II случајно извучена једна куглица. Колика је вјероватноћа да је она бијела?

7. Од свих ученика који су полагали поправни испит из математике и српског језика у некој школи њих 11% није положило математику, 9% није положило српски, а 2% нису положили нити математику нити српски. Ако случајно одаберемо једног ученика, да ли су независни догађаји:

A. Није положио математику;
B. Није положио српски?

Да ли су независни догађаји $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

8. Ако су A и B независни, показати да су и A и $\overline{B}$ независни, као и $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

9. Шест од 14 цедуљица је повољно за полагање испита. Два ученика, један за другим, бирају по једну цедуљицу. Наћи вјероватноће догађаја:

A. Први ученик је узео повољну цедуљицу,
B. И први и други су узели повољне цедуљице,
C. Други је узео повољну цедуљицу.

9. Двије фабрике A и B производе исти артикал. У A се при производњи примјењује прва технологија са двије технолошке операције узастопно и при њима се шкарт добија са вјероватноћама 0,4 и 0,5 редом. У B се примјењује друга технологија са три технолошке операције узастопно и при њима се шкарт добија са вјероватноћама 0,1, 0,2 и 0,3 редом. У A је међу исправним артиклима 90% артикала прве класе, а у B је међу исправним артиклима 70% артикала прве класе. Која технологија обезбјеђује већу вјероватноћу добијања артикала прве класе?

10. Утврђено је да при производњи једног артикла дефект I врсте има вјероватноћу 0,1, а дефект II врсте вјероватноћу 0,05. Дефекти се појављују независно један од другог. Наћи вјероватноћу:

a. Да артикал нема ни једну врсту дефекта;
b. Да је артикал дефектан;
c. Да артикал има само једну врсту дефекта, ако се зна да је дефектан.

11. Узроци дефекта аутомобилске гуме су: ексер, топлота, притисак. Вјероватнће узрока су редом: $\frac{8}{20}, \frac{7}{20}, \frac{5}{20}$. Вјероватноћа дефекта усљед ексера је 0,3, усљед топлоте је 0,2, а усљед притиска 0,1. Ако је наступио дефект, наћи вјероватноћу да га је проузроковала топлота.

12. Трећина једне од три групе производа је неисправна, а остали производи у свим групама су исправни. Случајно је узет производ из неке групе и показао се исправним. Наћи вјероватноћу да је тај производ узет из групе која садржи и неисправне производе.

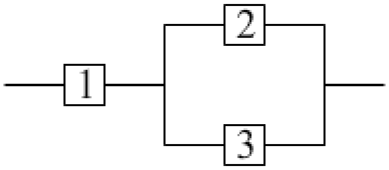
13. У кутији су три новчића од којих су два нормална, а трећи на обе стране има писмо. Случајно се узима један новчић и баца четири пута. Наћи вјероватноћу да је узет нормалан новчић, ако је у сва четири бацања пало писмо.

14. Дате су 3 једнаке кутије. У првој је m_1 бијелих и n_1 црних куглица, у другој је m_2 бијелих и n_2 црних куглица, у трећој су само црне куглице. Насумице је бирана кутија и на случајан начин извучена куглица. Наћи вјероватноћу да ће та куглица бити: 1. Бијела, 2. Црна.

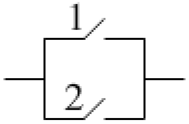
15. На три струга обрађују се исти машински елементи. На првом 60%, на другом 40%, на трећем 25% од свих елемената. При томе први струг даје 90% елемената прве класе, други 95%, а трећи 85%. Наћи вјероватноћу догађаја:

A. Случајно изабрани елеменат је прве класе,
B. Ако је елеменат прве класе, да је израђен на другом стругу.

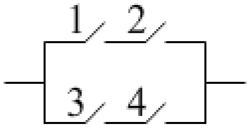
16. Технички систем се састоји од три блока који су повезани као на слици десно. Вјероватноће исправног рада тих блокова током неког периода су редом p_1, p_2 p_3. Колика је вјероватноћа да ће систем исправно радити током датог периода времена?

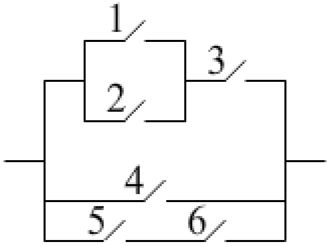


17. Прекидач 1 на слици десно случајно се укључује са вјероватноћом 0,5. Укључивање прекидача 2 зависи од укључивања прекидача 1 овако: Ако је 1 укључен, вјероватноћа да је 2 укључен је 0,7, а ако је 1 искључен, вјероватноћа да је 2 укључен је 0,8. Наћи вјероватноћу да струја тече кроз шему на слици.



18. Вјероватноћа да је прекидач укључен једнака је за све прекидаче, на сљедеће двије слике, и износи p. Прекидачи се укључују независно један од другог. Наћи вјероватноћу да струја тече у датим шемама.





7. Расподјеле

Међу најзначајнијим појмовима произашлим из теорије вјероватноће су случајна промјенљива и њена расподјела. Случајна промјенљива је реална функција случајних догађаја, тј. $X : \omega \to \mathbb{R}$. При томе скуп вриједности (кодомен) може бити дискретан (пребројив) или непрекидан (непребројив). Расподјела случајне промјенљиве је опет реална функција, али са скупом вриједности које су вјероватноће, или њихове густине.

7.1 Случајне промјенљиве

Када случајне исходе неког опита региструјемо као бројеве, тада радимо са случајним промјенљивим.

Дефиниција 7.1.1. Функција X која сваком исходу $\omega\in\Omega$ додјељује реални број $X(\omega)$ назива се случајна промјенљива. Случајне промјенљиве означавамо великим словима X, Y, Z, … .♦

Примјер 7.1.2. Новчић се баца два пута, а X је регистровани број писама. Овдје је скуп свих могућих исхода Ω = {ГГ, ГП, ПГ, ПП}, а случајна промјенљива узима вриједности 0, 1 и 2. То можемо писати X(ГГ) = 0, X(ГП) = X(ПГ) = 1 и X(ПП) = 2.

Нека је дат интервал реалних бројева S = [-1,5; 1,5]. Тада је $\{X\in S\} = \{-1,5 \le X \le 1,5\} = \{\omega : -1,5 \le X \le 1,5\}$ = {ГГ, ГП, ПГ}, па имамо $p\{X\in S\} = p\{-1,5 \le X \le 1,5\} = p$ {ГГ, ГП, ПГ} = ¾.♦

Из датог примјера видимо да случајна промјенљива не мора бити везана за Ω у израчунавању вјероватноћа. Друго, да грубо случајне промјенљиве можемо дијелити на дискретне и непрекидне.

Када случајна промјенљива X може узети вриједности $x_1, x_2, \dots, x_n$, са вјероватноћама $p_1, p_2, \dots, p_n$, при чему је $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, тада имамо случајну промјенљиву **дискретног** типа. **Расподјелу вјероватноћа** дискретне случајне промјенљиве можемо писати у облику

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

Дакле, у претходном примјеру (6.4.2.) имамо

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Примјер[24] 7.1.3. Из складишта неке фабрике (нпр. сијалица) се узима један по један производ и тестира исправност. Поједини исход може бити позитиван (+), или негативан (–). За поједини производ, вјероватноћа да је тест позитиван је ¾, а да је негативан ¼. Тестирање се обавља до првог позитивног теста. Нека је X број тестова закључно са првим позитивним тестом. Наћи

[24] Zoran Ivković: Matematička statistika, Naučna knjiga, Beograd, 1976.

расподјелу вјероватноћа случајне промјенљиве X и вјероватноћу догађаја A : „опит се заврши послије парног броја тестова“.

Рјешење: Скуп свих могућих исхода је Ω = {+, – +, – – +, – – – +, ...}. Случајне промјенљиве су $X(+) = 1$, $X(-+) = 2$, $X(--+) = 3$, ... , а скуп свих могућих њихових вриједности $X : R_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Догађај $\{X = n\}$ реализује се само ако је првих $n – 1$ тестова негативно, а n-ти тест позитиван. Тестови су независни догађаји, па имамо $p\{X = n\} = p(n) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{3}{4}$.

Дакле, расподјела (вјероватноћа) за X је $p(n) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, гдје је n природан број.

Примјетимо да је $\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 1$. Расподјела вјероватноћа је

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \frac{3}{4^2} & \frac{3}{4^3} & \frac{3}{4^4} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Догађај $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$ да је X паран број има вјероватноћу

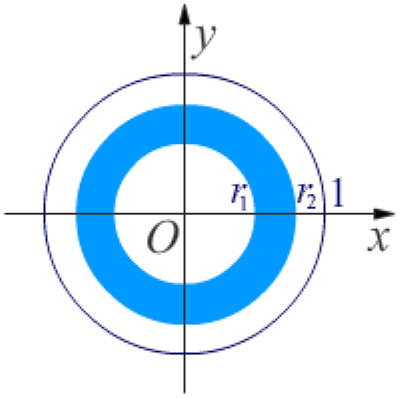
$$p(A) = \sum_{k=1}^{\infty} p(2k) = \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k-1} = 3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^{k} = \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{1}{5}.\blacklozenge$$

Примјер[25] 7.1.4. Случајно се бира тачка у кругу $x^2 + y^2 \le 1$ равни *Oxy*. Случајна промјенљива X је растојање биране тачке од координатног почетка. Описати простор догађаја.

Рјешење: Ако су приликом случајног бирања све тачке круга равноправне, онда је вјероватноћа бирања тачке унутар кружнице полупречника r пропорционална том полупречнику. Сваком елементарном догађају, тачки $M(x,y)$ додјељујемо по један број $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le r \le 1$. Вјероватноћа бирања појединe тачке је нула, па за случајну промјенљиву X узимамо кружне прстенове полупречника не већих од један.

[25] M. Obradović i D. Georgijević: Matematika (za IV razred srednje škole), Zavod za udžbenike, Beograd 1994.

Досљедно, један интервал је $I=(r_1,r_2)$, гдје је $0\le r_1\le r_2\le 1$, а случајни догађај $X\in I$ је дефинисан кружним прстеном $r_1<x^2+y^2<r_2$, као на слици десно. Површина овог кружног прстена је $P(X\in I)=r_2^{\,2}\pi-r_1^{\,2}\pi$, док је површина датог јединичног круга π. Према томе, вјероватноћу ове случајне промјенљиве можемо дефинисати као количник површине придруженог кружног прстена и површине цијелог круга, тј. $p(X\in I)=\dfrac{(r_2^{\,2}-r_1^{\,2})\pi}{\pi}$ = $r_r^{\,2}-r_1^{\,2}$. Исти резултат бисмо добили да смо узимали полузатворене, или затворене интервале.♦



Случајна промјенљива често није дискретна, већ је непрекидна, у смислу да су њене вриједности сви реални бројеви из неког (коначног, или бесконачног) интервала I. Тада је вјероватноћа сваке поједине вриједности нула, тј. $p\{\omega\mid X(\omega)=x\}=0$, за сваку вриједност случајне промјенљиве x интервала I. У даљем тексту узимамо да је подразумјевани интервал скуп реалних бројева.

Зато посматрамо **вјероватноћу**

$$F(x)=p(X\le x),\ -\infty<x<\infty,$$

која је функција од x и назива се **функција расподјеле** промјенљиве X.

Оваква функција је од посебног значаја за непрекидне, али има смисла и за дискретне случајне промјенљиве. Основне особине функције расподјеле непрекидне случајне промјенљиве су:

1. $0\le F(x)\le 1$;
2. $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$;
3. $x_1\le x_2 \Rightarrow F(x_1)\le F(x_2)$;
4. $p(a<X\le b)=F(b)-F(a)$;
5. $\lim\limits_{x\to x_0+} F(x)=F(x_0)$.

Примјер 7.1.5. Посматрајмо екесперимент случајног бирања тачке из централног круга полупречника R (в. примјер 7.1.4.). Дефинисати (неку) функцију расподјеле.

Рјешење: Нека је X случајна промјенљива која означава растојање биране тачке од координатног почетка. Ако је $0\le x\le R$, догађај $\{\omega|X(\omega)=x\}$ је круг полупречника x са центром у исходишту координатног система и са површином $x^2\pi$. Према интуитивној дефиницији вјероватноће

$$p(X(\omega)\le x)=\frac{x^2\pi}{R^2\pi} = \frac{x^2}{R^2},\ \text{за}\ 0\le x\le R.$$

Овако дефинисано X је непрекидна случајна промјенљива са функцијом расподјеле

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x^2}{R^2}, & 0\le x\le R \\ 1 & x>R. \end{cases}$$

Густина расподјеле непрекидне случајне промјенљиве дефинише се као ненегативна функција $f(x)$ за коју је $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ и $F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$.

Зато је $p(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx$, а у тачкама неперкидности фунције густине $f(x)$ важи

$\dfrac{dF(x)}{dx}=F'(x)=f(x)$, тј. $F(x)$ је примитивна функција (неодређени интеграл) за $f(x)$.

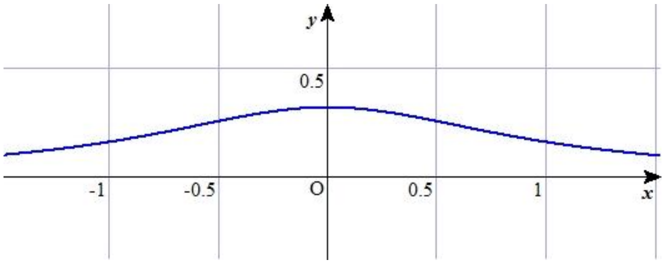
Примјер 7.1.6. Случајна промјенљива *X* има Кошијеву расподјелу за $-\infty < x < \infty$, ако је њена густина расподјеле вјероватноћа једнака

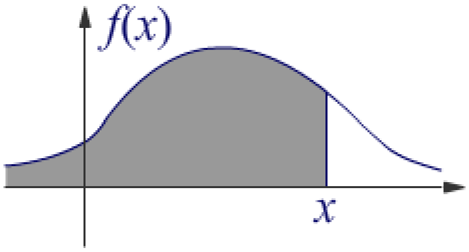
$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

a. Конструисати криву густине $f(x)$.
b. Израчунати вјероватноћу $p(-1<X<1)$.

Рјешење:
a. Крива густине је дата на сљедећој слици.
b. $p(-1<X<1)$ =

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}.\blacklozenge$$





Геометријски, функција расподјеле $F(x)$ представља површину испод криве густине $f(x)$, лијево од тачке x, као на слици лијево.

Вјероватноћа на интервалу (*a*,*b*) дата густином $f(x)$ је једнака површини изнад интервала (*a*,*b*) до криве густине.

Примјери[26] **7.1.7.**

[26] Svetozar Vukadinović: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Beograd, 1978.

1. Циљ се гађа са четири метка. Наћи расподјелу вјероватноћа и функцију расподјеле вјероватноће случајне промјенљиве *X*, ако је у сваком гађању вјероватноћа погодка циља једнака 0,5 и ако *X* означава број погодака.

2. Новчић непрвилног облика, за који појава грба има вјероватноћу 3/4 , бачен је три пута. Нека је X број појаве грбова на горњим странама при бацању новчића. Наћи расподјелу и функцију расподјеле вјероватноће случајне промјенљиве *X*.

3. Новчић (исправан) се баца до појаве грба. Нека је *X* број бацања (укључујући и бацање када се појавио грб). Наћи закон расподјеле вјероватноћа случајне промјенљиве *X*.

4. Урна садржи 3 бијеле и 5 црних куглица. Наћи и упоредити функције расподјеле вјероватноћа случајних промјенљивих X_1 и X_2, гдје је

- X_1 - број бијелих куглица добијених са двије извучене куглице без враћања,
- X_2 - број бијелих куглица добијених са двије извучене куглице са враћањем.

5. Одредити константу *a* тако да функција $f(x)=\begin{cases} ax^2, & x\in[0,2] \\ 0, & x\notin[0,2] \end{cases}$ буде густина расподјеле вјероватноћа. Затим, наћи функцију расподјеле и израчунати вјероватноћу $p(0<X<1)$.

6. Случајна промјенљива *X* има **равномјерну расподјелу** на интервалу (*a*,*b*) (*a* и *b* коначни бројеви такви да је *a* < *b*), ако је њена густина расподјеле вјероватноће дата са

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b \\ 0, & x>b. \end{cases}$$

Наћи функцију расподјеле $F(x)$ и нацртати графике $f(x)$ и $F(x)$.

7. Функција **расподјеле Вејбула** (најчешће карактерише вијек трајања електричних апарата) је

$$F(x)=1-e^{-\frac{x^m}{x_0}},\ x\ge 0.$$

Наћи:

a. Густину расподјеле $f(x)$.
b. Вриједност x_p за коју је $F(x_p)=p$. Таква вриједност случајне промјенљиве назива се **квантилом** реда p.
c. Вриједност x за коју густина расподјеле достиже максимум. Таква вриједност назива се **модом** случајне промјенљиве.

8. Функција **расподјеле Релеја** (карактерише ексцентрицитет производа) гласи:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Наћи следеће.

a. Густину расподјеле $f(x)$.
b. Вриједност $x_{0,5}$ за коју $F(0,5) = 0,5$. Таква вриједност случајне промјенљиве назива се **медијаном** случајне промјенљиве (квантил реда 0,5).
c. Вриједност x за коју густина достиже максимум (**мода** случајне промјенљиве).

Резултати:

1. $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$ и $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{16}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{5}{16}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{11}{16}, & 2 < x \le 3 \\ \frac{15}{16}, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}.$

2.

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

3. Простор елементарних догађаја је бесконачан, па случајна промјенљива X узма вриједности природних бројева редом. Како су појаве грба и писма једнако вјероватне, а реализације опита међу собом независне, биће

$$p(X=1) = \frac{1}{2},\ p(X=2) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},\ p(X=3) = \left(1-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \dots$$

Уопште, имамо $p(X=x) = \frac{1}{2^x}$, гдје је $x = 1, 2, 3, \dots$. Збир свих вјероватноћа једнак је јединици:

$$\sum_{x=1}^{\infty} p(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1. \blacklozenge$$

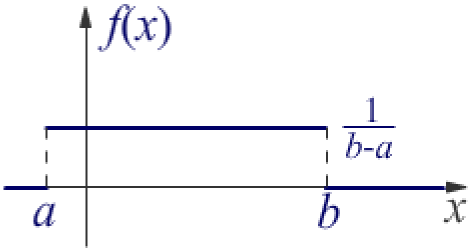
4. $F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{20}{56}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{50}{56}, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$ и $F_2 = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{25}{64}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{55}{64}, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$.

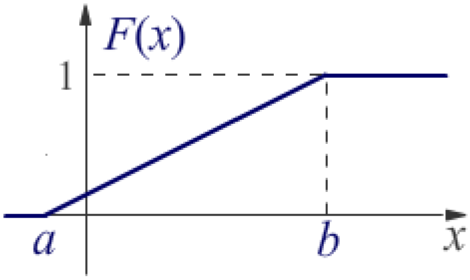
5. Укупна вјероватноћа мора бити један, па имамо $\int_0^2 ax^2 dx = 1$, одакле $a = \frac{3}{8}$. Сада, функција $f(x)$ није негативна, дефинисана је за све вриједности x и свугдје је непрекидна осим у тачки $x = 2$, што значи да она може представљати густину расподјеле вјероватноћа. Функција расподјеле је

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^3}{8}, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Тражена вјероватноћа је $p(0 < X < 1) = \int_0^1 \frac{3}{8} x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{8}$.

6. Функција расподјеле је $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$. Графици густине расподјеле и функције расподјеле вјероватноћа дати су на сљедеће двије слике, редом.





7. a. $f(x) = \frac{m}{x_0} x^{m-1} e^{-\frac{x^m}{x_0}}$, $x \geq 0$. **b**. $x_p = [-x_0 \ln(1-p)]^{\frac{1}{m}}$. **c**. $\left(\frac{m-1}{m} \cdot x_0\right)^{\frac{1}{m}}$.

8. a. $f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. **b**. $\sigma\sqrt{\frac{2\log 2}{\log e}} \approx 1{,}18\sigma$. **c**. σ.♦

Вишедимензионалне случајне промјенљиве користимо када случајни исход ω опита треба везивати за више од једне нумеричке карактеристике.

На примјер, ако случајно изаберемо једног становника и региструјемо његову тежину (*T*) и висину (*V*). Онда Ω можемо схватитити као скуп свих становника датог мјеста, а ω као једног случајно изабраног. Тада су $T(\omega)$ и $V(\omega)$ два броја, тежина и висина случајне промјенљиве, тј. пар (*T*, *V*).

Дефиниција 7.1.8. Нека су $X = X(\omega)$ и $Y = Y(\omega)$ двије случајне промјенљиве дефинисане над истим скупом свих могућих исхода Ω. Уређен пар (X,Y) називамо **дводимензионална** случајна промјенљива.♦

Дводимензионалну случајну промјенљиву можемо представити тачком у равни *Oxy*. И у овом случају их дијелимо на **дискретан** (пребројив) скуп тачака и **непрекидан** (непребројив) скуп. Расподјела дискретног скупа тачака се може дати табеларно:

$Y \setminus X$	x_1	x_2	…	x_i	…
y_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_2,y_1)$	…	$p(x_i,y_1)$	…
y_2	$p(x_1,y_2)$	$p(x_2,y_2)$	…	$p(x_i,y_2)$	…
…	…	…	…	…	…
y_j	$p(x_1,y_j)$	$p(x_2,y_j)$	…	$p(x_i,y_j)$	…
…	…	…	…	…	…

Примјетимо да је $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

Примјер 7.1.9. Из кутије са 4 (различите) црвене, 3 плаве и 2 бијеле куглице, на случајан начин се бирају истовремено двије куглице. Нека је међу изабранима број црвених *X*, а *Y* бијелих куглица. Наћи закон расподјеле 2-дим случајне промјенљиве (*X*, *Y*).

Рјешење: $p(x = 0, y = 0)$ = p{обе плаве} = $\binom{3}{2}/\binom{9}{2}$ = 3/36, $p(0,1)$ = p{плава и бијела} = $\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}/\binom{9}{2}$ = 3·2/36, p(0,2) = p{обе бијеле} = $\binom{2}{2}/\binom{9}{2}$ = 1/36, $p(1,0)$ = $\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}/\binom{9}{2}$ = 12/36, $p(1,1)$ = $\binom{4}{1}\cdot\binom{2}{1}/\binom{9}{2}$= 8/36, p(2,0) = $\binom{4}{2}/\binom{9}{2}$ = 6/36. Догађаји (1,2), (2,1) и (2,2) нису могући. Из табеле видимо нпр. и да је вјероватноћа да ниједна извучена куглица није црвена 10/36 (збир првог ретка), или да је извучена само једна бијела куглица 14/36 (збир средње колоне). Примјетимо да је збир свих ћелија (редака, или колона) тачно један.♦

$X \setminus Y$	0	1	2
0	3/36	6/36	1/36
1	12/36	8/36	0
2	6/36	0	0

7.2 Биномна расподјела

У основи теорије вјероватноће је **Биномна расподјела**[27], односно расподјела случајне промјенљиве уз Бернулијеву (*Bernoulli*) шему (модел):

i. случајни опит се понавља n = 1, 2, 3, … пута;
ii. свака реализација има само два могућа исхода (успјех и неуспјех);
iii. вјероватноће успјеха p и неуспјеха $q = 1 - p$ су исте за сваку реализацију;
iv. реализације су независне.

Дакле, посматрамо опит са случајним исходима и у њему догађај A чија је вјероватноћа $p(A) = p$ константна у свим понављањима датог опита. Нама су интересантни само исходи A и $\bar{A}$, односно њихове вјероватноће p и $q = 1 - p$. У n = 1, 2, 3, … поновљених опита, посматрамо низове (дужине n) састављене од A и $\bar{A}$, којих има 2^n. Број опита у којима се реализовао догађај A је случајна промјенљива S_n = 0, 1, 2, …, n. Расподјела вјероватноћа случајне промјенљиве S_n је **биномна расподјела**.

У случају великог броја узорака, уобичајене су двије врсте апроксимација биномне расподјеле: **Пуасонова** (*Poisson*) и **нормална расподјела**. Међутим, ове апроксимације су расподјеле интересантне и саме по себи.

Примјер 7.2.1. Коцка се баца 3 пута и након сваког бацања региструје се догађај A: „пала је шестица“. Овдје је $n = 3$, $p(A) = \frac{1}{6}$, а S_3 је број падања шестице (0, 1 или 2).

Има тачно $2^3 = 8$ догађаја $\bar{A}\bar{A}\bar{A}$, $\bar{A}\bar{A}A$, $\bar{A}A\bar{A}$, $A\bar{A}\bar{A}$, $\bar{A}AA$, $A\bar{A}A$, $AA\bar{A}$, AAA. Међутим, низова у којима се A појављује k пута (k = 0, 1, 2, 3), и $\bar{A}$ појављује $3 - k$ пута има $\binom{3}{k}$ и сви имају једнаке вјероватноће $p^k q^{3-k}$. Према томе, расподјела вјерованоћа је

$$p_k = p\{S_3 = k\} = \binom{3}{k} p^k q^{3-k} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

[27] http://www.gimbl.com/lat/binomnaras.php

Примјетимо да из $\{S_3 = 0\} + \{S_3 = 1\} + \{S_3 = 2\} + \{S_3 = 3\} = \Omega$ слиједи

$$p_0 + p_1 + p_2 = \binom{3}{0}q^3 + \binom{3}{1}pq^2 + \binom{3}{2}p^2q + \binom{3}{3}p^3 = 1 . \blacklozenge$$

Биномну расподјелу потпуно дефинише расподјела њене случајне промјенљиве S_n. Међутим, биномну расподјелу можемо свести и на два параметра *n* и *p*, ради чега је означавамо и са $\mathcal{B}(n;p)$. Тако је биномна расподјела из претходног примјера $\mathcal{B}(3;\frac{1}{6})$.

Уопште, догађај $\{S_n = k\}$, посматран као ω-подскуп је скуп свих низова дужине *n* у којима се *A* јавља *k* пута (негација догађаја *A* се јавља $n - k$ пута). Одредимо вјероватноће појединих вриједности случајне промјенљиве S_n, тј. биномне расподјеле $p_k = p\{S_n = k\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Вјероватноћа једног исхода који припада $\{S_n = k\}$, због независности опита, је

$$p(A^{(1)} \cap \bar{A}^{(2)} \cap \ldots \cap A^{(n)}) = p(A) \cdot p(\bar{A}) \cdot \ldots \cdot p(A) = pq \ldots p = p^k q^{n-k},$$

гдје је $q = p(\bar{A}) = 1 - p$, а $A^{(j)}$ је реализација догађаја A у *j*-том опиту, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Како низова у којима се *A* појављује *k*-пута и $\bar{\mathrm{A}}$ се појављује (*n-k*)-пута има $\binom{n}{k}$ и сви имају једнаке вјероватноће $p^k q^{n-k}$, добијамо коначно **биномну расподјелу**:

$$p_k = p\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, \mathrm{n}.$$

Примјетимо да из $\sum_{k=0}^{n}\{S_n = k\} = \Omega$ слиједи $\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1$.

Вјероватноћу биномне расподјеле често пишемо[28] овако

$$P_{n,x,p} = p\{S_n = x\} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \text{ гдје је } q = 1 - p.$$

Са таквим ознакама, увијек је $\sum_{x=0}^{n} P_{n,x,p} = 1$. Такође, имамо **рекурзију**

$$\frac{P_{n,x+1,p}}{P_{n,x,p}} = \frac{n!\,p^{x+1}q^{n-x-1}}{(x+1)!(n-x-1)!} : \frac{n!\,p^x q^{n-x}}{x!(n-x)!} = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Из ове рекурзије сљеде закључци:

- Када је $\frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q} > 1$, тј. ако је $x < np - q$, тада је вјероватноћа $P_{n,x+1,p} > P_{n,x,p}$.

[28] Svetozar Vukadinović: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Beograd, 1978.

- Када је $\frac{n-x}{x+1}\cdot\frac{p}{q}=1$, тј. $x=np-q$, тада је $P_{n,x+1,p} = P_{n,x,p}$.
- Када је $\frac{n-x}{x+1}\cdot\frac{p}{q}<1$, тј. $x>np-q$, тада је $P_{n,x+1,p} < P_{n,x,p}$.

Према томе, вјероватноћа $P_{n,x,p}$ биномне расподјеле расте све док је x мање од $np-q$, достиже максимум за $x=np-q$, а за веће вриједности x опада. Број $np-q$ назива се **модална** вриједност биномне случајне промјенљиве. Ако је модална вриједност цијели број, онда постоје двије **највјероватније вриједности** биномне случајне промјенљиве:

$$np-q \text{ и } np-q+1=np-p.$$

Примјер 7.2.3. Наћи највјероватнију вриједност биномне случајне промјенљиве S_n, ако је:

a. n=39, p = 0,935;
b. n = 15, $p = \frac{1}{6}$.

Рјешење: а. Из $np-q=39\cdot 0{,}935-0{,}065=36$ и $np+p=39\cdot 0{,}935+0{,}935=37$, видимо да дата случајна промјенљива има двије модалне вриједности 36 и 37. b. $np-q=\frac{5}{3}$, $np+p=\frac{8}{3}$.♦

Примјер 7.2.4. Производи садрже 1% шкарта. Колики треба бити узорак да вјероватноћа појаве бар једног шкарта не буде мања од 0,95?

Рјешење: Како је $P_{n,x\ge 1,p}=1-P_{n,0,p}$, а $P_{n,0,p}=q^n$, то из услова задатка $P_{n,x\ge 1,p}\ge 0{,}95$ слиједи $1-q^n\ge 0{,}95$, односно $q^n\le 0{,}05$. Логаритмовањем налазимо $n\ge\frac{\log 0{,}05}{\log 0{,}99}=298$.♦

Примјер 7.2.5. У производњи се добија 6% неисправних производа. Ако узмемо узорак од 5 производа, колика је вјероватноћа да се међу њима налазе три неисправна?

Рјешење: Вјероватноћа да имамо 3 неисправна (са вјероватноћом једног неисправног p = 0,06) је $P_{5;3;0,06}$. Помоћу рекурзије $P_{n,x+1,p}=\frac{n-x}{x+1}\cdot\frac{p}{q}\cdot P_{n,x,p}$ израчунавамо за x = 0, 1 и 2, редом:

$$P_{5;0;0,06}=(1-0{,}06)^5=0{,}734,\ P_{5;1;0,06}=\frac{5}{1}\cdot\frac{0{,}06}{0{,}94}\cdot 0{,}734=0{,}234,$$

$$P_{5;2;0,06}=\frac{4}{2}\cdot 0{,}0638\cdot 0{,}234=0{,}030,\ P_{5;3;0,06}=\frac{3}{3}\cdot 0{,}0638\cdot 0{,}030=0{,}002.♦$$

За веће узорке, за $n > 5$, ради ефикаснијег израчунавања вјероватноћа биномне расподјеле користе се табеле вјероватноћа $P_{n,x,p}$. Међутим, за много веће узорке, за $n > 50$ користимо апроксимације.

Примјер 7.2.6. Вјероватноћа да је производ дефектан је 0,01. Из складишта се узима 100 производа. Колика је вјероватноћа да међу њима буде:

a. Тачно 5 дефектних;
b. Број дефектних не више од 10.

Рјешење: Имамо догађај A : „производ је дефектан“ са вјероватноћом p(A) = p = 0,01 и догађај $\overline{\mathrm{A}}$: „производ није дефектан“ са вјероватноћом $p(\overline{\mathrm{A}}) = q = 0{,}99$. Опит понављамо 100 пута (у неизмјењеним условима), тако да су поједини опити међусобно независни. Отуда:

a. $p\{S_{100}=5\} = \binom{100}{5} 0{,}01^5 \cdot 0{,}99^{95}$;
b. Догађај да дефектних производа није више од 10 је $\{S_{100}=0\}+\{S_{100}=1\}+\ldots+\{S_{100}=10\}$ са вјероватноћом $p\left(\sum_{k=0}^{10}\{S_{100}=k\}\right) = \sum_{k=0}^{10} p_k = \sum_{k=0}^{10}\binom{100}{k}\cdot 0{,}01^k \cdot 0{,}99^{100-k}$. ♦

Из овог примјера видимо како је тешко израчунавати вјероватноће биномне расподјеле када је број понављања n веома велики. Зато користимо апроксимације. За $n > 50$ и за $np < 15$ примјењује се **Пуасонова** апроксимација, а у другом случају (велико n и $np \geq 10$) **нормална**. Уколико је n веће, утолико је грешка апроксимације мања.

Пуасонова апроксимација 7.2.7. Ставимо $np = \lambda > 0$, биће

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \text{ за } k = 0, 1, 2, \ldots, \text{ кад } n \to \infty. ♦$$

Пуасонова расподјела се означава са $\mathcal{P}(\lambda)$ и не користи се само као апроксимација биномне расподјеле. Она се појављује као добар математички модел за проучавање „протока догађаја“. При томе, „догађај“ је обично тренутак, на примјер звоњења телефона, наилазак аутомобила, космичке зраке.

Ако је $X[a,b]$ случајна промјенљива која представља број „догађаја“ у временском интервалу $[a,b]$. То је случајна промјенљива дискретног типа са скупом могућих вриједности {0,1,2,…} и особинама[29]:

a. **хомогеност**: расподјела вјероватноћа за $X[a,b]$ не зависи од положаја интервала $[a,b]$, већ само од његове дужине $b - a$;

[29] Zoran Ivković: Matematička statistika, Naučna knjiga, Beograd, 1976.

b. **независност**: ако су интервали $[a_1,b_1]$ и $[a_2,b_2]$ дисјунктни, онда су догађаји $X[a_1,b_1]$ и $X[a_2,b_2]$ независни;

c. **сепарабилност**: $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p\{X[t,t+\Delta t]>1\}}{\Delta t}=0$, што практично значи немогућност да се у било којем тренутку t „догоди“ више од једног „догађаја“.

Са наведеним особинама, случајна промјенљива $X[0,t] = X(t)$ има Пуасонову расподјелу $\mathcal{P}(\nu t)$, са параметром $\nu > 0$ који карактерише фреквенцију „протока догађаја“.

Примјер 7.2.8. Нека је $X(t)$ број честица које емитује радиоактивни извор за t часова, са Пуасоновом расподјелом са параметром $20t$. Колика је вјероватноћа да извор емитује тачно 6 честица током 15 минута?

Рјешење: Како $X(t)$ има расподјелу $\mathcal{P}(20t)$ за t = 0,25 часова имаћемо да X(0,25) има $\mathcal{P}(5)$ расподјелу. Непосредно израчујнавамо $p\{X(0,25)=5\} = e^{-5}\frac{5^6}{6!} = 0{,}1462.$♦

Нормална апроксимација 7.2.9.

i. $p\left\{\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}=x\right\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, кад $n\to\infty$;

ii. $p\left\{a\le\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}\le b\right\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, кад $n\to\infty$.

Примјер 7.2.10. У претходном примјеру биномне расподјеле (7.2.2.) примјењујемо Пуасонову апроксимацију, јер је $\lambda = np = 100\cdot 0{,}01 = 1 < 10$, па добијамо:

a. $p\{S_{100}=5\}=e^{-1}\cdot\frac{1}{5!}=0{,}003$;

b. $\sum_{k=0}^{10}\binom{100}{k}\cdot 0{,}01^k\cdot 0{,}99^{100-k}\approx\sum_{k=0}^{10}e^{-1}\frac{1}{k!} = 1{,}000.$♦

Вриједности Пуасонове расподјеле $p(X\le x)=\sum_{k=0}^{x}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ можемо наћи у таблици:

λ=	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
x= 0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.3012	0.2466	0.2019	0.1653
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358	0.6626	0.5918	0.5249	0.4628
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197	0.8795	0.8335	0.7834	0.7306
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810	0.9662	0.9463	0.9212	0.8913
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963	0.9923	0.9857	0.9763	0.9636
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9985	0.9968	0.9940	0.9896
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9974
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

λ=	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.5	5.0	5.5
x= 0	0.1353	0.1108	0.0907	0.0743	0.0608	0.0498	0.0408	0.0334	0.0273	0.0224	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041
1	0.4060	0.3546	0.3084	0.2674	0.2311	0.1991	0.1712	0.1468	0.1257	0.1074	0.0916	0.0611	0.0404	0.0266
2	0.6767	0.6227	0.5697	0.5184	0.4695	0.4232	0.3799	0.3397	0.3027	0.2689	0.2381	0.1736	0.1247	0.0884
3	0.8571	0.8194	0.7787	0.7360	0.6919	0.6472	0.6025	0.5584	0.5152	0.4735	0.4335	0.3423	0.2650	0.2017
4	0.9473	0.9275	0.9041	0.8774	0.8477	0.8153	0.7806	0.7442	0.7064	0.6678	0.6288	0.5321	0.4405	0.3575
5	0.9834	0.9751	0.9643	0.9510	0.9349	0.9161	0.8946	0.8705	0.8441	0.8156	0.7851	0.7029	0.6160	0.5289
6	0.9955	0.9925	0.9884	0.9828	0.9756	0.9665	0.9554	0.9421	0.9267	0.9091	0.8893	0.8311	0.7622	0.6860
7	0.9989	0.9980	0.9967	0.9947	0.9919	0.9881	0.9832	0.9769	0.9692	0.9599	0.9489	0.9134	0.8666	0.8095
8	0.9998	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976	0.9962	0.9943	0.9917	0.9883	0.9840	0.9786	0.9597	0.9319	0.8944
9	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9973	0.9960	0.9942	0.9919	0.9829	0.9682	0.9462
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9972	0.9933	0.9863	0.9747
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9991	0.9976	0.9945	0.9890
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9992	0.9980	0.9955
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9983
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

λ=	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	11.0	10.0	12.0	14.0	15.0
x= 0	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005	0.0002	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
2	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028	0.0012	0.0028	0.0005	0.0001	0.0000
3	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103	0.0049	0.0103	0.0023	0.0005	0.0002
4	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293	0.0151	0.0293	0.0076	0.0018	0.0009
5	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671	0.0375	0.0671	0.0203	0.0055	0.0028
6	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301	0.0786	0.1301	0.0458	0.0142	0.0076
7	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202	0.1432	0.2202	0.0895	0.0316	0.0180
8	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328	0.2320	0.3328	0.1550	0.0621	0.0374
9	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579	0.3405	0.4579	0.2424	0.1094	0.0699
10	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830	0.4599	0.5830	0.3472	0.1757	0.1185
11	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968	0.5793	0.6968	0.4616	0.2600	0.1848
12	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916	0.6887	0.7916	0.5760	0.3585	0.2676
13	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645	0.7813	0.8645	0.6815	0.4644	0.3632
14	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165	0.8540	0.9165	0.7720	0.5704	0.4657
15	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513	0.9074	0.9513	0.8444	0.6694	0.5681
16	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730	0.9441	0.9730	0.8987	0.7559	0.6641
17	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857	0.9678	0.9857	0.9370	0.8272	0.7489
18	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928	0.9823	0.9928	0.9626	0.8826	0.8195
19	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965	0.9907	0.9965	0.9787	0.9235	0.8752
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984	0.9953	0.9984	0.9884	0.9521	0.9170
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9977	0.9993	0.9939	0.9712	0.9469
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9990	0.9997	0.9970	0.9833	0.9673
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9999	0.9985	0.9907	0.9805
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	1.0000	0.9993	0.9950	0.9888
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	0.9997	0.9974	0.9938
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9967
27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9983
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9991
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Примјер 7.2.11. Новчић је бачен 14 400 пута и писмо је пало 7 428 пута. Наћи вјероватноћу толиког и већег одступања броја падања писма од броја np = 14400·$\frac{1}{2}$ = 7200.

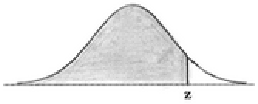
Рјешење: Означимо са S_{14400} број падања писма у n = 14400 бацања новчића. Тражимо вјероватноћу догађаја $A = \{S_{14400} - 7200 \geq 7428 - 7200\}$, односно

$$p_A = p\{228 \leq S_{14400} - 7200 \leq 14400\} = p\left\{3{,}8 \leq \frac{S_{14400} - 7200}{60} \leq 240\right\},$$

јер је $\sqrt{npq} = \sqrt{14400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 60$. Ако примјенимо нормалну апроксимацију, стављајући a = 3,8 и $b = \infty$ имамо $p_A \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{3,8}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Овај интеграл се не може израчунати уобичајеним алгебарским методама, већ се вриједности читају из таблица Лапласове (*Laplace*) функције

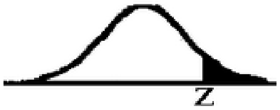
$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \text{ односно } \widehat{\Phi}(z) = 1 - \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Из друге сљедеће таблице (таблице обрнуте нормалне расподјеле), за горње вјероватноће од z до +∞, налазимо за z = 3,8 вјероватноћу 0,00007235. Према томе, тражено рјешење је p_A = 0,00007.♦



Нормална расподјела
вјероватноће од -oo до z

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990



Нормална расподјела
вјероватноће од z до +oo

Z	P{Z to oo}	Z	P{Z to oo}	Z	P{Z to oo}	Z	P{Z to oo}
2.0	0.02275	3.0	0.001350	4.0	0.00003167	5.0	2.867 E-7
2.1	0.01786	3.1	0.0009676	4.1	0.00002066	5.5	1.899 E-8
2.2	0.01390	3.2	0.0006871	4.2	0.00001335	6.0	9.866 E-10
2.3	0.01072	3.3	0.0004834	4.3	0.00000854	6.5	4.016 E-11
2.4	0.00820	3.4	0.0003369	4.4	0.000005413	7.0	1.280 E-12
2.5	0.00621	3.5	0.0002326	4.5	0.000003398	7.5	3.191 E-14
2.6	0.004661	3.6	0.0001591	4.6	0.000002112	8.0	6.221 E-16
2.7	0.003467	3.7	0.0001078	4.7	0.000001300	8.5	9.480 E-18
2.8	0.002555	3.8	0.00007235	4.8	7.933 E-7	9.0	1.129 E-19
2.9	0.001866	3.9	0.00004810	4.9	4.792 E-7	9.5	1.049 E-21

Задаци 7.2.12.

1. Ако је p = 0,01 вјероватноћа да сијалица прегори у току првих 20 часова рада, колика је вјероватноћа да 10 таквих сијалица не прегори у првих 20 часова рада?

[$0{,}99^{10} \approx 0{,}904$]

2. Пет исправних новчића бачено је истовремено. Наћи расподјелу вјероватноћа случајне промјенљиве S_n која означава број грбова.

3. Ако је коцка бачена 3 пута, колика је вјероватноћа да се најмање једном појави пет или шест?

[$1-\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27} \approx 0{,}7$]

4. Вјероватноћа бар једне реализације догађаја A у четири независна експеримента је 0,59. Наћи вјероватноћу појаве догађаја A у једном експерименту.

[0,2]

5. Из кутије која садржи 30 артикала, од којих је 6 дефектно, узимају се случајно 4 артикла. Нека је X број дефектних међу та 4 артикла. Наћи расподјелу за X у случају када:

a. Артикли се узимају без враћања у кутију;
b. Артикли се узимају један по један са враћањем.

6. Нека случајна промјенљива X има расподјелу $p\{X = k\} = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$. Наћи

a. $p\{X$ је непаран број$\}$;
b. $p\{X \geq 4\}$;
c. $p\{X$ је дјељиво са 5$\}$.

7. Два фудбалера наизмјенично шутирају пенал, све док један од њих не промаши. Вјероватноћа давања гола у једном шутирању за првог играча је 0,6 а за другог 0,7. Наћи (за оба играча) законе расподјеле вјероватноћа случајних промјенљивих које представљају број шутева за сваког играча.

8. На путу кретања аутомобила налазе се редом три семафора који раде независно и на сваком је са вјероватноћом 0,5 упаљено црвено и 0,5 зелено свјетло. Нека случајна промјенљива *X* представља број семафора поред којих прође аутомобил прије првог заустављања. Наћи расподјелу вјероватноћа за *X*.

9. Прва машина производи два пута више артикала од друге. Прва производи 5% дефектних артикала, а друга 3%. Дневна производња обе машине ставља се у исто складиште. Наћи вјероватноћу да међу 12 случајно изабраних артикала из складишта буду 3 дефектна.

10. Нека породица има шесторо дјеце. Узимајући да су вјероватноће рађања дјечака и дјевојчица једнаке, наћи вјероватноћу да је у тој породици:

a. 3 дјечака и 3 дјевојчица;
b. дјечака је од 2 до 5 закључно.

11. Лансирање метеоролошке ракете се понавља до првог успјешног лансирања. Ако успјеха нема у 4 покушаја, експеримент се прекида. Успјешна лансирања су независни догађаји са вјероватноћама 0,85. Први покушај лансирања кошта *a* новчаних јединица, а сваки следећи *a*/3. Ако је лансирање успјешно, онда добијена информација обезбјеђује зараду *b* новчаних јединица. Ако је *c* нето цијена цијелог експеримента, наћи расподјелу вјероватноћа за *c*.

12. Радиоактивно зрачење једног извора мјери се у 3 временска интервала, сваки дужине 15 секунди. Број честица регистрованих у интервалу од 15 секунди је случајна промјенљива са Пуасоновом расподјелом $\mathcal{P}(0{,}8)$. Наћи вјероватноћу да су регистроване тачно три честице у само једном од три мјерења.

13. Познато је да је вјероватноћа производње дефектног артикла 0,03. Артикли се пакују у кутију по 120 комада. Наћи вјероватноћу да:

a. у кутији нема дефектних;
b. број дефектних у кутији није мањи од 3;
c. колико је артикала потребно паковати у кутију, с вјероватноћом не мањом од 0,9 да у њој има бар 120 исправних?

14. Школа има 1200 ученика. Вјероватноћа да првог дана школе неко има рођендан је 1/365. Колика је вјероватноћа да 6 ученика имају рођендан тог истог дана.

15. Систем се састоји од 150 компоненти, а свака од њих ради са вјероватноћом 0,8. Ако све компоненте функционишу независно једна од друге, а цијели систем функционише ако ради бар 100 компонентеи, наћи вјероватноћу да систем функционише.

7.3. Математичко очекивање

Од параметара којима лакше разумијемо центар растурања, или средњу вриједност случајне промјенљиве најпознатији су математичко очекивање, медијана и мода.

Математичко очекивање 7.3.1. Ако је *X* **дискретна** случајна промјенљива дата расподјелом

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \ \sum_{k=1}^{n} p_k = 1,$$

тада је математичко очекивање случајне промјенљиве X једнако

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \ .$$

Ако је *X* **непрекидна** случајна промјенљива, дефинисана густином расподјеле вјероватноћа $f(x)$, за $-\infty < x < \infty$, тада је њено математичко очекивање једнако

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \ . \blacklozenge$$

Математичко очекивање је средња вриједност блиска појму „центар масе“ у механици, односно тежишту. У случају да наведени збир (интеграл) конвергира тада математичко очекивање постоји, а у случају да дивергира, математичко очекивње дате варијабле не постоји.

Примјер 7.3.2. Баца се фер новчић. Нека је X број бацања до прве појаве грба, укључујући и бацање кад се појавио грб. Наћи математичко очекивање $M(X)$ случајне промјенљиве X.

Рјешење: Случајна промјенљива *X* може узимати вриједности 1, 2, 3, ..., *k*, ..., са вјероватноћама, редом $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^k}, \dots$. Отуда $M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}}$.

Из збира геометријског реда $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$, за $|x| < 1$, диференцирањем добијамо $1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$, што у нашем случају, за x = $\frac{1}{2}$, даје $M(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2. \blacklozenge$

Примјер 7.3.3. Наћи математичко очекивање непрекидне случајна промјенљива са равномјерном расподјелом вјероватноћа на одређеном интервалу.

Рјешење: Случајна промјенљива *X* дата је равномјерном густином

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}$$

и има математичко очекивање $M(X) = \int_a^b \frac{xdx}{b-a} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$.♦

Медијана 7.3.4. Ако је $F(x)$ функција расподјеле случајне промјенљиве X, тада се рјешење једначине

$$F(x_p)=p$$

Назива **квартилом** реда p. Квартил реда 0,5 назива се **медијана** случајне промјенљиве X, тј. медијана се добија као рјешење једначине:

$$F(M_e)=F(x_{0,5})=p(X<M_e)=0{,}5\,.♦$$

Поред медијане, користе се и квартили $X_{0,25}$ и $X_{0,75}$, тзв. први и трећи.

Мода 7.3.5. Ако је *X* случајна промјенљива, онда је **мода** њена највјероватнија вриједност.♦

Ако је *X* непрекидна случајна промјенљива, тада се под модом подразумјева она вриједност *x* за коју је густина расподјеле максимална. Када су расподјеле у односу на центар растурања симетричне, тада се математичко очекивање, медијана и мода поклапају. При равномјерној расподјели, $M(X) = M_e$, док је мода неодређена.

Ако су дати случајна промјенљива *x* и реалне константе *a* и *b*, тада је $y = ax + b$ такође случајна промјенљива. Када варијабла *x* узме вриједност x_k, тада варијабла *y* узима вриједност $y_k = ax_k + b$, при чему су им вјероватноће једнаке, тј. $p(y_k) = p(x_k)$.

Став 7.3.6. За математичко очекивање важи једнакост $M(ax+b)=aM(x)+b$,

Доказ: Из дефиниције м. очекивања и особине вјероватноће $p(ax + b) = ap(x) + b$, слиједи

$$M(ax+b) = \sum_k (ax_k+b)p(x_k) = a\sum_k x_k\, p(x_k)+b\sum_k p(x_k)\,.$$

Са друге стране, због $\sum_k x_k\, p(x_k)=M(x)$, $\sum_k p(x_k)=1$ слиједи $M(ax+b)=aM(x)+b$, што је и требало доказати.♦

Став 7.3.7. Математичко очекивање производа независних случајних промјенљивих X и Y једнако је производу њихових математичких очекивања

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Доказ: Случајна промјенљива XY узима вриједности $x_k y_j$ са вјероватноћама $p_k p_j$, при чему због услова независности ($p_{kj} = p_k p_j$) слиједи $M(XY) = \sum_k \sum_j x_k x_j p_{kj}$ = $\sum_k x_k p_k \sum_j y_j p_j$ = $M(X)M(Y)$. Слично се доказује и у непрекидном случају.♦

Став 7.3.8. Математичко очекивање апсолутне вриједности случајне промјенљиве није мање од апсолутне вриједности математичког очекивања те промјенљиве, тј.

$$M(|X|) \geq |M(X)|.$$

Доказ: Ако случајна промјенљива *X* узима вриједности $x_1, x_2, ..., x_n$, са вјероватноћама $p_1, p_2, \dots, p_n$, онда случајна промјенљива $|X|$ узима вриједности $|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|$, са истим вјероватноћама. Из

$$-|x_k|p_k \leq x_k p_k \leq |x_k|p_k,\ k = 1, 2, \dots, n,$$

сабирањем слиједи $-M(|X|) = -\sum_{k=1}^{n} |x_k|\, p_k$ $\leq M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ $\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|\, p_k = M(|X|)$, а отуда се добија тврђење става.♦

Став 7.3.9. Ако се све вриједности случајно промјенљиве *X* налазе на интервалу (*a*,*b*), тада се и математичко очекивање налази на том интервалу.

Доказ: Нека је *f*(*x*) густина дефинисана на (*a*,*b*) случајне промјенљиве *X*. Тада, из неједнакости

$$\int_a^b af(x)dx < \int_a^b xf(x)dx < \int_a^b bf(x)dx$$

добијамо

$$a < M(X) = \int_a^b xf(x)dx < b$$

јер је $\int_a^b f(x)dx = 1$.♦

Ако је x_1 најмања, а x_2 највећа вриједност случајне промјенљиве *X*, тада је $x_1 \leq M(X) \leq x_2$. Такође је очигледно и сљедеће. Ако је расподјела вјероватноћа осно симетрична у односу на праву $x = c$, тј. ако за сваку реалну вриједност *x* важи неједнакост $f(c + x) = f(c - x)$, тада је $M(X) = c$.

Примјер 7.3.10. Показати да је $M(X) = np$ за биномни закон расподјеле вјероватноћа

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,\,1,\,2,\,\dots,\,n.$$

Рјешење: $M(X) = \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x\frac{n!\,p^x(1-p)^{n-x}}{x!(n-x)!} = \sum_{x=1}^{n}\frac{n!\,p^x(1-p)^{n-x}}{(x-1)!(n-x)!} =$ $np\sum_{x=1}^{n}\frac{(n-1)!\,p^{x-1}(1-p)^{n-x}}{(x-1)!(n-x)!}$. Смјеном $x-1=y$ добијамо $M(X) = np\sum_{y=0}^{n-1}\frac{(n-1)!\,p^y(1-p)^{n-1-y}}{y!(n-1-y)!} =$ $np[p+(1-p)]^{n-1} = np$.♦

Примјер 7.3.11. Показати да је $M(X)=\lambda$ за Пуасонову расподјеле вјероватноћа

$$p(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\ x=0,\,1,\,2,\,\dots\,.$$

Рјешење: $M(X) = \sum_{x=0}^{\infty} xe^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$. Користили смо познату дефиницију Ојлеровог броја, тј. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$.♦

Примјер 7.3.12. Показати да је $M(X)=\mu$ за нормалну расподјеле вјероватноћа, дату густином

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\ -\infty < x < \infty.$$

Рјешење: $M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$ = [смјена $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$] = $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}(\sigma t+\mu)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ = $\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt$. Први интеграл једнак је нули, а други јединици. Отуда $M(X)=\mu$.♦

Став 7.3.13. Неједнакост Маркова. Ако су вриједности $x_1, x_2, \dots, x_n$, дискретне случајне промјенљиве X позитивне и такве да је $x_k < \alpha$ за $k = 1, 2, \dots, m$ и $x_k > \alpha$ за $k = m+1, m+2, \dots, n$, тада је

$$p(X>\alpha)<\frac{M(X)}{\alpha}.$$

Доказ: Зато што су x_k за све $k = 1, 2, \dots, n$ позитивни бројеви, из услова става слиједи

$$M(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k > \sum_{k=m+1}^{n}k_k p_k > \sum_{k=m+1}^{n}\alpha p_k = \alpha\sum_{k=m+1}^{n}p_k,$$

а отуда

$$p(X > \alpha) = \sum_{k=m+1}^{n} p_k < \frac{M(X)}{\alpha}.$$

Затим, из једнакости $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1 - \sum_{k=m+1}^{n} p_k$, слиједи $p(x < \alpha) > 1 - \frac{M(x)}{\alpha}$, а отуда и тражена неједнакост Маркова.♦

Задаци 7.3.14.

1. За случајну промјенљиву *X* и константу *a* доказати:

i. Ако је $X < a$, тада је $M(X) < a$;
ii. Ако је $X > a$, тада је $M(X) > a$.

[сабирањем $x_k p_k < a p_k$]

2. Доказати да је математичко очекивање броја реализација догађаја *A* у неком опиту, једнако вјероватноћи реализације догађаја *A*.

[*X* : број реализација A – узима вриједности 0 и 1,
са вјероватноћама *p* и *q* = 1 – *p*. Тада је M(X) = …]

3. Колики укупан збир тачака можемо очекивати, ако се исправна коцка баци 20 пута?

[70]

4. Наћи математичко очекивање случајне промјенљиве дефинисане густином

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

[$\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2$]

5. Наћи математичко очекивање и медијану експоненцијалне расподјеле, дефинисане густином

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

[$M(X) = \frac{1}{\lambda}$, $M_e = \frac{\ln 2}{\lambda}$]

6. Кошијева расподјела је дефинисана густином

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\text{, за } -\infty < x < \infty.$$

Показати да ова расподјела нема математичко очекивање, али има медијану.

7. Случајна промјенљива *X* је дефинисана густином

$$f(x)=\begin{cases} 2\cos 2x, & x\in(0,\frac{\pi}{4}) \\ 0, & x\notin(0,\frac{\pi}{4}). \end{cases}$$

Наћи моду и медијану случајне промјенљиве *X*.

[Функција 2 cos 2x нема максимум на интервалу (0,π/4), па мода не постоји. Медину израчунавамо из $p(X<M_e)=0{,}5$, или $p(0<X<M_e)=0{,}5$, тј. $2\int_0^{M_e}\cos 2x dx$ = $\sin 2M_e=0{,}5$, одакле $M_e=\frac{\pi}{12}$]

8. Наћи математичко очекивање дискретних расподјела

i. $p(X=x)=\frac{3^x e^{-3}}{x!}$, x = 0, 1, 2, ... ;

ii. $p(X=x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}$, x = 1, 2, 3, ... ;

iii. $p(X=x)=\binom{3}{x}\left(\frac{5}{9}\right)^{x}\left(\frac{4}{9}\right)^{3-x}$, x = 0, 1, 2, 3;

iv. $p(X=x)=\frac{\binom{x}{5}\binom{4}{3-x}}{\binom{9}{3}}$, x = 0, 1, 2, 3.

[3; 3; $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{3}$]

9. Наћи математичко очекивање расподјела датих густином

i. $f(x)=2x$, 0 < *x* < 1;

ii. $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, 0 < *x* < 1;

iii. $f(x)=6x(1-x)$, 0 < *x* < 1;

iv. $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $1<x<\infty$.

[$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, не постоји]

7.4 Дисперзија

Математичког очекивања је просјечна вриједност случајне промјенљиве, а дисперзија је просјечно квадратно одступање од те просјечне вриједности.

Дефиниција 7.4.1. Нека је дата случајна промјенљива X. Ако постоји број

$$D(X)=M(X-M(X))^2$$

тада кажемо да је тај број **дисперзија** (варијанса) случајне промјенљиве X.

Позитивна вриједност корјена дисперзије назива се **стандардно одступање** (девијација)

$$\sigma=\sqrt{D(X)}\,.\blacklozenge$$

Примјер 7.4.2. Наћи дисперзију и стандардно одступање случајне промјенљиве

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Рјешење: $M(X)=0\cdot\frac{2}{9}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{4}{9}=\frac{11}{9}$, па је $D(X)=M(X-M(X))^2$ = $M\left(X-\frac{11}{9}\right)^2$ = $\left(0-\frac{11}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}+\left(1-\frac{11}{9}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(2-\frac{11}{9}\right)^2\cdot\frac{4}{9}$ = $\frac{1}{9^3}(11^2\cdot 2+2^2\cdot 3+7^2\cdot 4)$ = $\frac{450}{81\cdot 9}$ = $\frac{50}{81}$ и $\sigma(X)=\frac{5\sqrt{2}}{9}$.♦

Примјер 7.4.3. Наћи дисперзију и стандардно одступање равномјерне дате густином

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x\in(a,b) \\ 0, & x\notin(a,b). \end{cases}$$

Рјешење: Математичко очекивање равномјерне расподјеле расподјеле (в. примјер 7.3.3) је $M(X)=\frac{a+b}{2}$. Дисперзија је $D(X)$ = $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{dx}{b-a}$ = $\frac{(b-a)^2}{12}$, а стандардно одступање $\sigma(X)=\frac{|b-a|\sqrt{3}}{6}$.♦

Примјетимо да дисперзију у дискретном случају израчунавамо формулом $\sum_k [x_k-M(X)]^2 p_k$. У непрекидном случају то је формула $\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx$. Међутим, често је практичније користити сљедећи израз.

Став 7.4.4. Дисперзија случајне промјенљиве X је

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2.$$

Доказ: $D(X)$ = $M[X-M(X)]^2$ = $M\{X^2-2M(X)X+[M(X)]^2\}$ = $M(X^2)-2M(X)M(X)+[M(X)]^2$ = $M(X^2)-[M(X)]^2$.♦

Примјер 7.4.5. Индикатор I_A случајног догађаја *A*, је случајна промјенљива:

I_A = 1 ако се *A* реализује, I_A = 0 ако се *A* не реализује, и *p*(*A*) = *p*.

Показати да су *p* и $p-p^2$ редом математичко очекивање и дисперзију индикатора догађаја А.

Рјешење: Формално пишемо $I_A=I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A.\end{cases}$

$M(I_A)$ = $1\cdot p(A)+0\cdot p(\overline{A})$ = $p(A)=p$. Даље, из очигледног $I_A{}^2=I_A$ слиједи

$D(I_A)$ = $M(I_A{}^2)-[M(I_A)]^2$ = $M(I_A)-p^2$ = $p-p^2$.♦

Примјер 7.4.6. Наћи дисперзију Пуасонове расподјеле

$$p(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\ x=0,\ 1,\ 2,\ \dots\ .$$

Рјешење: Математичко очекивање Пуасонове расподјеле је $M(X)=\lambda$ (в. примјер 7.3.11.) .

Дисперзија $D(X)$ = $M(X^2)-\lambda^2$ = $\sum_{k\ge0}k^2p_k-\lambda^2$ = $\sum_{k\ge0}k^2\frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}-\lambda^2$ = $e^{-\lambda}\sum_{k\ge1}k\frac{1}{(k-1)!}\lambda^{k-1}-\lambda^2$

= $e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{\lambda^{k+1}}{k!}-\lambda^2$ = $e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^{k+1}}{k!}+e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{k!}-\lambda^2$ = $\lambda\sum_{k=0}^{\infty}ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}-\lambda^2$ = $\lambda M(X)+\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}-\lambda^2$ = $\lambda^2+\lambda-\lambda^2$ = λ .♦

Примјер 7.4.7. Наћи дисперзију нормалне расподјеле дате густином

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\ -\infty < x < \infty.$$

Рјешење: Математичко очекивање нормалне расподјеле је $M(X)=\mu$ (в. примјер 7.3.12.).

Очекивање квадрата $M(X^2)$ = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$ налазимо смјеном $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$ и користећи чињеницу $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$. Добијамо $M(X^2)=\sigma^2+\mu^2$. Дакле, дисперзија је $D(X)$ = $M(X^2)-[M(X)]^2$ = $(\sigma^2+\mu^2)-\mu^2$ = σ^2.♦

Примјетимо да параметри μ и σ^2 који се појављују у нормалној расподјели представљају њено математичко очекивање и дисперзију, а посебно σ је њено стандардно одступање. Та два параметра потпуно дефинишу нормалну расподјелу, па је означавамо са $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

Став 7.4.8. Особине дисперзије (варијансе) су:

i. $D(X)\ge 0$, при чему $D(X)=0$ ако и само ако је $X=c$ скоро извјесно;
ii. $D(cX)=c^2D(X)$, гдје је c коначан број;
iii. $D(X+c)=D(X)$;
iv. ако су X и Y независне тада је $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$;
v. функција од c: $M(X-c)^2$ има минимум $D(X)$ за $c=M(X)$.

Доказ: iv. $D(X+Y)$ = $M(X+Y)^2-[M(X+Y)]^2$ = $M(X^2+2XY+Y^2)-[M(X)+M(Y)]^2$ = $M(X^2)+2M(XY)+M(Y^2)-[M(X)]^2-2M(X)M(Y)-[M(Y)]^2$ = $M(X^2)-[M(X)]^2+M(Y^2)-[M(Y)]^2$ = $D(X)+D(Y)$.

v. Слиједи из $M(X-c)^2$ = $M\big(X-M(X)+M(X)-c\big)$ = $M\big(X-M(X)\big)+\big(M(X)-c\big)^2$.♦

Примјер 7.4.9. Доказати да је *npq* дисперзија биномне расподјеле (*p* + *q* = 1):

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,2,\dots,n.$$

Рјешење: Математичко очекивање биномне расподјеле је $M(X) = np$ (в. примјер 7.3.10.).

I начин. Прво тражимо очекивање квадрата $M(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ = (користимо познату једнакост $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$) = $\sum_{k=0}^{n} kn\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$ = $np\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)}$ = (смјена *j* = *k* – 1, *m* = *n* - 1) = $np\sum_{j=0}^{m} (j+1)\binom{m}{j} p^j q^{m-j}$ = (раздвајамо сабирке) =

$np\left(\sum_{j=0}^{m} j\binom{m}{j} p^j q^{m-j} + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p^j q^{m-j}\right)$ = (због $j\binom{m}{j} = m\binom{m-1}{j-1}$) =

$np\left(\sum_{j=0}^{m} m\binom{m-1}{j-1} p^j q^{m-j} + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p^j q^{m-j}\right)$ =

$np\left((n-1)p\sum_{j=0}^{m} \binom{m-1}{j-1} p^{j-1} q^{(m-1)-(j-1)} + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p^j q^{m-j}\right)$ = $np\left((n-1)p(p+q)^{m-1} + (p+q)^m\right)$ =

$np\left((n-1)p+1\right)$ = $n^2p^2 + np(1-p)$. Затим, налазимо дисперзију $D(X)$ = $M(X^2) - (M(X))^2$ = $np(1-p) + n^2p^2 - (np)^2$ = $np(1-p)$.

II начин. Нека је A_k догађај да се у *k*-том понављању опита реализује случајни догађај *A*, гдје је *k* = 1, 2, …, n. Тада се број опита S_n у којима се реализовало *A*, од укупно *n* опита, може помоћу индикатора (в. примјер 7.4.5.) I_k догађаја A_k написати у облику $S_n = I_1 + I_2 + \dots + I_n$. Понављања догађаја *A* су независни догађаји па је $D(S_n) = D(I_1) + D(I_2) + \dots + D(I_n)$ (став 7.4.8. iv.). Међутим, $D(I_k) = p(A_k) - p(A_k)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$ (примјер 7.4.5.), па је $D(S_n) = npq$, што је и требало показати. ♦

Случајна промјенљива $\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ из израза за нормалну апроксимацију биномних вјероватноћа је стандардизован облик за S_n. Стандардизовани облик, који се у литератури означава Z* за Z, са нормалном расподјелом $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ има такође нормалну расподјелу $\mathcal{N}(0, 1)$, што овдје нећемо доказивати. Међутим, доказаћемо једну за Теорију вјероватноће значајну неједнакост.

Чебишљева неједнакост 7.4.10. Ако случајна промјенљива *X* има коначно математичко очекивање квадрата, тада за свако ε > 0 важи неједнакост

$$p\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M(X^2)}{\varepsilon^2} .$$

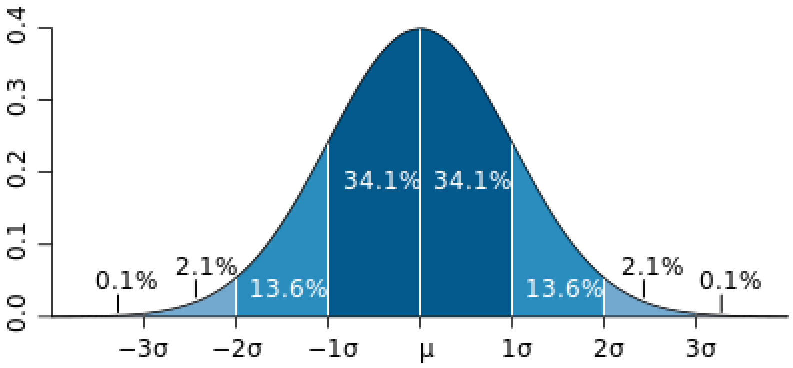
Доказ: Нека *X* има густину *f*(*x*). Тада је $M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{|x|\ge\varepsilon} x^2 f(x)dx + \int_{|x|<\varepsilon} x^2 f(x)dx \ge$

$\int_{|x|\ge\varepsilon} x^2 f(x)dx \ge \int_{|x|\ge\varepsilon} \varepsilon^2 f(x)dx = \varepsilon^2 \int_{|x|\ge\varepsilon} f(x)dx \;\; \varepsilon^2 p\{|X|\ge\varepsilon\}$.♦

Када се умјесто *X* у Чебишљеву неједнакост стави *X* – *M*(*X*) добије се њен познатији облик

$$p\{|X - M(X)| \ge \varepsilon\} \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Видјели смо да стандардна девијација σ мјери степен расејавања случајне промјенљиве око математичког очекивања. Наиме, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{M(X - M(x))^2}$. Практично, у случају великог броја понављања, подаци попримају нормалну расподјелу, као на сљедећој слици[30].



У нормалној расподјели је68% вриједности у интервалу плус-минус једна стандардна девијација σ око средње вриједности μ расподјеле (тамно плаво подручје). Око 95% свих реализација је у интервалу $\pm 2\sigma$ од μ. Око 99,7% узорака се реализује унутар интервала ($\mu - 3\sigma$, $\mu + 3\sigma$).

Очекивање и дисперзију, односно стандардну девијацију примјењујемо и у израчунавању (линеарне) корелације. **Корелација** је повезаност између двије промјенљиве. Коефицијент корелације случајних промјенљивих *X* и *Y* дефинише се као

$$\rho_{X,Y} = \frac{M[(X - M(X))(Y - M(Y))]}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

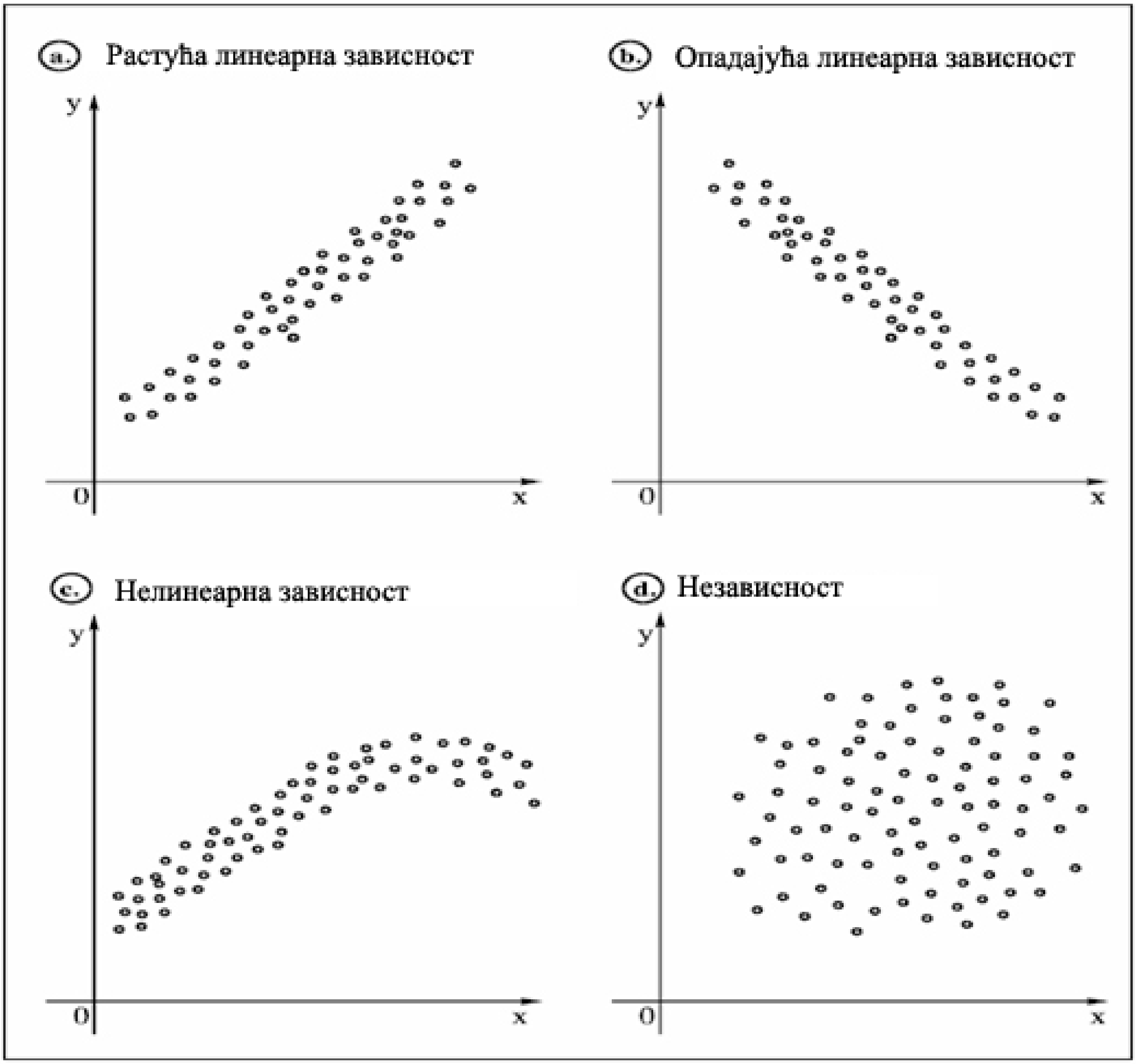
Коефицијент корелације има сљедеће особине:

i. $|\rho_{X,Y}| \le 1$;

ii. ако су *X* и *Y* независне, $\rho_{X,Y} = 0$;

[30] http://sr.wikipedia.org/wiki/Стандардна_девијација

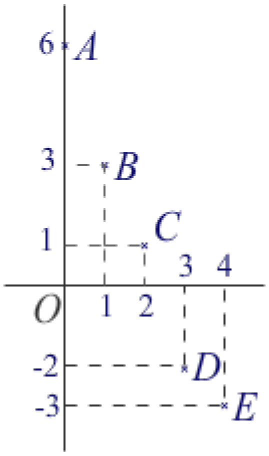
iii. биће $|\rho_{X,Y}|=1$ ако и само ако $Y=\alpha X+\beta$ ($\alpha<0$ за $\rho_{X,Y}=-1$ и $\alpha>0$ за $\rho_{X,Y}=1$).



Примјер 7.4.11. Нађимо коефицијент корелације координата у паровима:

(0,6), (1,3), (2,1), (3,-2), (4,-3).

Рјешење: Дати уређени парови тачака се могу представити и у Декартовом правоуглом систему



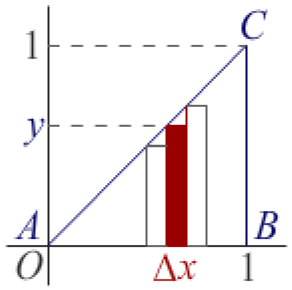
координата као на слици лијево. На слици видимо да су то тачке A, B, C, D и E које се прилично добро групишу око неке опадајуће праве, што значи да имају негативну корелацију блиску броју -1 (увијек је -1 ≤ ρ ≤ 1). Тачније, израчунавамо прегледно, ред по ред

x_i	0	1	2	3	4	10
y_i	6	3	1	-2	-3	5
x_i^2	0	1	4	9	16	30
x_iy_i	0	3	2	-6	-12	-13
y_i^2	36	9	1	4	9	59

$$\rho_{X,Y} = \frac{5\cdot(-13)-5\cdot 10}{\sqrt{5\cdot 30-10^2}\cdot\sqrt{5\cdot 59-5^2}} = \frac{-115}{30\sqrt{15}} \approx -0{,}98976\,.\blacklozenge$$

Примјер 7.4.11. Нека (X,Y) има равномјерну (униформну) густину у троуглу ΔABC са тјеменима A(0,0), B(1,0) и C(0,1). Наћи коефицијент корелације X и Y.

Рјешење: Површина троугла ΔABC је P_Δ = ½, па је функција густине константа 1/ P_Δ = 2 за све тачке (x,y)∈ ΔABC, а нула изван троугла, тј. $f(x,y)=\begin{cases} 2, & (x,y)\in\Delta \\ 0, & (x,y)\notin\Delta. \end{cases}$ Наиме, дати троугао се састоји од (шрафирано на слици десно) инфинитезималних правоугаоника основе Δx и висине $y = x$ (хипотенуза троугла лежи на симетрали I квадранта, на правој $y = x$) и површине $y\cdot\Delta x$. Збир порвршина ових правоугаоника конвергира површини троугла. Густина је 2, па је вјероватноћа налажења тачке у i-том правоугаонику $y_i\cdot 2\Delta x$. Отуда



$$\sum_i y_i\cdot 2\Delta x \to \int_0^1 x2dx = x^2\Big|_0^1 = 1\,.$$

Дакле, све очекиване тачке су заиста унутар троугла. Даље је

$$M(X)=\int_0^1 x2xdx=\frac{2}{3},\; M(Y)=\int_0^1 y2(1-y)dy=\frac{1}{3},\; (X^2)=\int_0^1 x^2 2xdx=\frac{1}{2},$$

$$M(Y^2)=\int_0^1 y^2 2(1-y)dy=\frac{1}{6},\; D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\frac{1}{18},\; D(Y)=M(Y^2)-[M(Y)]^2=\frac{1}{18}$$

, $M(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^1\left(\int_0^x 2xydy\right)dx = \int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$, па је $\rho_{X,Y} = \frac{M(XY)-M(X)M(Y)}{+\sqrt{D(X)D(Y)}}$

$$= \frac{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{18}} = \frac{1}{2}\,.\blacklozenge$$

Задаци[31] 7.4.12.

[31] Zoran Ivković: Matematička statistika, Naučna knjiga, Beograd, 1976. стр. 51.

1. Новчић се баца два пута и региструје *X* број писама. Наћи математичко очекивање и дисперзију случајне промјенљиве *X*.

2. Вјероватноћа поготка у циљ је ¼. Гађа се до првог поготка у циљ, али не више од *n* пута. Нека је случајна промјенљива *X* број гађања. Наћи њено математичко очекивање.

3. Електронски уређај има дужину живота *X* (у јединицама 1000 часова) са густином расподјеле

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Претпоставка је да је трошак производње једног уређаја 2 новчане јединице, а да га произвођач продаје по цијени 5 и гарантује поврат новца ако је X < 0,5. Дакле, зарада произвођача је случајна промјенљива *У*.

i. Наћи дисперзију *X*.
ii. Наћи математичко очекивање *У*.

4. Кутија садржи три бијеле и три црне куглице. Случајно се извлаче двије куглице. Особа која извлачи куглице добија 2 новчаних јединица за сваку извучену бијелу куглицу и 4 н.ј. за сваку извучену црну куглицу. Наћи математичко очекивање и дисперзију добитка ове особе.

5. Првих 5 понављања неког експеримента коштају 10 новчаних јединица свако, а свако даље понављање кошта 5 н.ј. и експеримент се понавља све до првог успјешног исхода. Вјероватноћа успјешног исхода је увијек иста 0,9 и понављања су независна. Наћи математичко очекивање и дисперзију цјене цјеле операције.

6. Кутија садржи два дефектна и 8 исправних производа. Производи се ваде један за другим и испитује се њихов квалитет. Број извлачења потребних да се дође до оба дефектна је случајна промјенљива. Наћи њено математичко очекивање и дисперзију.

7. Дневна потражња неког производа је је случајна промјенљива X са расподјелом

$$p\{X = k\} = a\frac{2^2}{k!},\ k = 1, 2, 3, 4.$$

i. Одредити константу *a*.
ii. Наћи математичко очекивање дневне потражње.
iii. Ако је продајна цијена производа 5 н.ј. а произвођач их производи дневно *n*, наћи:
   1. расподјелу дневног пазара као функцију од n;
   2. колико треба комада произвести да би се максимизирао дневни пазар?

8. Мета је начињена од три концентрична круга полупречника $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 1 и $\sqrt{3}$ метара. Погодак у унутрашњи круг рачуна се 4 поена, у сљедећи прстен 3 поена и у спољни прстен 2 поена. Погодак

ван мете рачуна се 0 поена. Случајна промјенљива *X* представља удаљеност поготка од центра мете, и има густину

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, & x\ge 0\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Наћи математичко очекивање резултата после 5 гађања.

9. Пречник круга се мјери приближно. Дужина је случајна промјенљива са равномјерном (униформном) расподјелом на интервалу (5; 7). Наћи математичко очекивање површине круга.

10. Доказати особине дисперзије: Став 7.4.8. ii., iii.

11. Посматрати $p\{|X-M(X)|\ge\varepsilon\}$ као функцију од ε и скицирати њен график, за:

$$X:\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}, \qquad X:\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix}.$$

12. Исто као у претходном примјеру, за униформну (равномјерну) расподјелу $\mathcal{U}$(-1; 3).

8. Статистика

Математичка статистика обухвата математичку теорију вјероватноће и теореме статистике које су се појавиле у XIX вијеку, а које су даље водиле до примјене у демографским истраживањима, затим у државним пословима, економији, здравству, итд. Статистика је значајно утицала на развој тзв. научног метода (спознаја путем претпоставки и експеримената) и индукције (закључивања од појединачног ка општем), затим на развој експерименталне психологије и социологије. У физици, математичка статистика је у темељима термодинамике, статистичка физике и квантне механике.

Међутим, попут информатике, или операционих истраживања, статистику данас сматрамо и аутономнм науком. Тако[32] Давид Мур 1998, тада предсједник Америчке Статистичке Асоцијације, каже да: „иако је статистика математичка наука, она није дио математике, нити би требало да се предаје студентима на такав начин[33]“. Разлози за ово осамостаљивање леже у сложености друштвених појава и њиховом насумичном, наизглед случајном појављивању, а са друге стране у необично једноставној примјени иначе „тешких“ теорема математичке статистике.

8.1. Узорак

Статистика је наука прикупљања "чињеница из бројева" која укључује организацију и анализу посматраних података. Скуп посматраних података називамо **популација**, или генерални скуп. Прикупљени подаци су подскуп популације, који називамо **узорак**. Код сваког елемента популације (и узорка) интересујемо се за неку његову нумеричку карактеристику, коју називамо **обиљежје** или параметар.

Број елемената популације може бити коначан или бесконачан, дискретно[34] (пребројиво) или континуално (непребројиво) много. **Обиљежја** елемената популације грубо дијелимо на:

- **нумеричке** податке – квантитативне, са придруженим нумеричким вриједностима. На примјер, податак је висина лица, па су обиљежја бројеви (169 cm, 185 cm, 173 cm …);
- **описне** податке – квалитативне, номиналне. На примјер, податак је боја косе, па су прикупљени подаци боје (црна, смеђа, плава, ...).

Примјери 8.1.1. Кутија садржи n куглица, од којих је np бијелих и nq црних ($p + q = 1$). Дефинисати популацију и обиљежје. Наћи један начин процјене броја куглица (за познато p и велико n).

Рјешење: Све дате куглице чине једну популацију. Обиљежје сваког елемента (куглице) је њена боја. То је описна карактеристика, која се лако сводина нумеричку, рецимо, ако ставимо обиљежје 1 за бијелу, и 0 за црну куглицу.

Рецимо да не знамо број бијелих и црних куглица, расподјелу обиљежја можемо открити познајући бројеве n и p, јер је тада np бијелих и $n(1 - p)$ црних кухлица у популацији. На примјер,

---

[32] M. Lovrić, J. Komić, S. Stević: STATISTIČKA ANALIZA (metodi i primjena), Banja Luka, 2006. str. 3
[33] David Moore, George McCabe: INTRODUCTION TO THE PRACTICE OF STATISTICS, New York, 1998, str. Xviii.
[34] Дискретне бројимо (као кликере), а непрекидне мјеримо (вагамо као брашно).

све куглице добро измјешамо из кутије извучемо m куглица. Ако је међу њима m_1 бијелих процјенићемо да у кутији има $\frac{m_1}{m} \cdot n$ бијелих куглица.♦

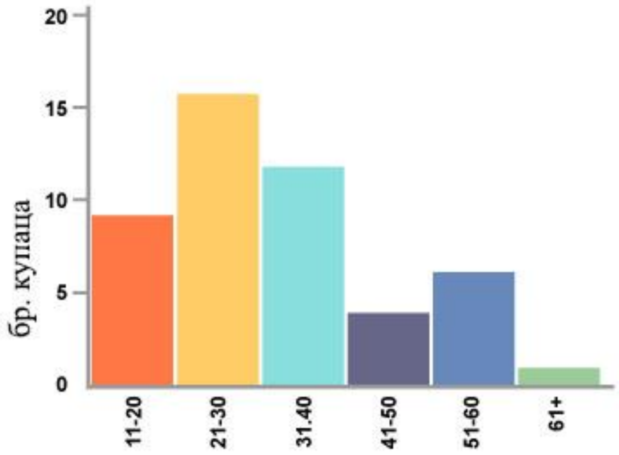
Статистичка обрада података обухвата узимање узорка из дате популације, опис, њихово организовање, рецимо према учесталости, и анализу. Затим изводимо закључке.

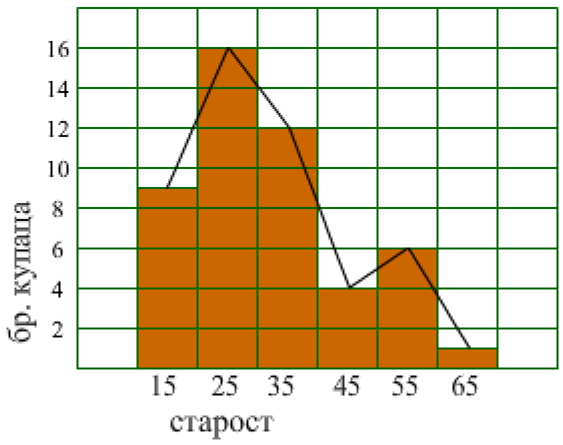
Примјер 8.1.2. У некој продавници музике, 16. маја 2008. у току једног часа улазили су купци различите старости:

25, 29, 45, 19, 36, 17, 60, 51, 39, 24, 15, 13, 31, 18, 24, 32, 37, 27, 23, 53, 41, 34, 29, 28, 52, 17, 55, 47, 34, 28, 22, 20, 64, 39, 38, 33, 24, 16, 27, 19, 26, 27, 25, 32, 26, 48, 54, 35.

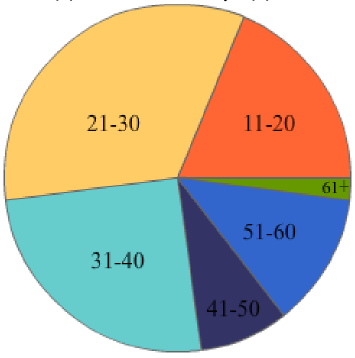
старост	бр. купаца
11-20	9
21-31	16
31-40	12
41-50	4
51-60	6
61+	1

Горе десно су исти подаци разврстани у мањи број (шест) група према учесталости, у тзв. **дијаграм фреквенције**, а овај даље можемо прегледно приказати помоћу **бар графа** и **хистограма**.





Сљедећи начин представљања дијаграма фреквенције је тзв. **пита граф**. То је круг подијељен у кружне исјечке, од којих сваки представља једну групу. Површина сваког исјечка је пропорционална фреквенцији, броју случајева те групе.



Пуни угао од 360° подјелимо са укупним бројем купаца 48, а затим сразмјерно броју купаца у дијаграму фреквенција, формирамо шест кружних исјечака, чије централне углове одређујемо помоћу формуле $\alpha = \frac{360}{48} \cdot$(бр. купаца). Добијамо централне углове исјечака:

67,5° 120° 90° 30° 45° 7,5°

Кружни исјечци су бојени слично ступцима претходног бар-графа.♦

Након организовања прикупљених података према њиховој учесталости, настојимо још више смањити количину података на неколико бројева који би могли бити представници читавог узорка, а можда и популације.

У претходном примјеру, купаца музичких производа, прмјећујемо да се њихов узраст групише негдје у интервалу од 20 до 40 година старости. Бројеви из таквих интервала се називају **средње вриједности**, или централне тенденције, а има више начина њиховог дефинисања. Најпознатије три средње вриједности статистике су:

- **аритметичка средина** – просјек података, то је збир свих вриједности подијељен њиховим бројем;
- **модус** – најчешћи број који се јавља у низу прикупљених података (може их бити више);
- **медијана** – вриједност која се налази у средини низа података поређаних по величини.

Аритметичку средину популације означавамо са μ, а узорка са $\bar{x}$, када су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ елементи, бројеви из узорка. Свеједно да ли је ријеч о популацији, или о њеном дијелу, аритметичка средина је број $\frac{\sum x}{n} = \frac{1}{n}\sum x$. Као што знамо до раније, грчко велико слово Σ „сигма“ овдје значи „сабрати све сљедеће“. Ако су подаци дати у облику неке табеле фреквенције, гдје сваки x_k има фреквенцију, број појављивања f_k, тада та формула постаје $\frac{\sum x_k f_k}{\sum f_k}$.

На примјер, на посменој задаћи из математике у неком разреду је била једна петица, пет четворки, десет тројки, осам двојки и четири јединице. Просјечна оцјена разреда, аритметичка средина је

$$\mu = \frac{5\cdot 1+4\cdot 5+3\cdot 10+2\cdot 8+1\cdot 4}{1+5+10+8+4} = \frac{75}{28} \approx 2{,}67857.$$

5	1
4	5
3	10
2	8
1	4

У сортираним низовима са непарним бројем бројева, нпр. 13, 15, 16, медијана је средишњи број 15. У низовима са парним бројем бројева, нпр. 13, 15, 16, 17, медијана је средња вриједност средишњег пара, број $\frac{15+16}{2}$ = 15,5.

Примјер 8.1.3. Сортирани по величини, 48 података о старости купаца музике из претходног примјера (8.1.2.) су:

13, 15, 16, 17, 17, 18, 19, 19, 20, 22, 23, 24, 24, 24, 25, 25,
26, 26, 27, 27, 27, 28, 28, 29, 29, 31, 32, 32, 33, 34, 34, 35,
36, 37, 38, 39, 39, 41, 45, 47, 48, 51, 52, 53, 54, 55, 60, 64.

Збир свих је 1558, па је аритметичка средина, **просјек**: 1558/48 ≈ 32,4583. Од ових 48 бројева, 24 се појављују само по једном, 9 их се јавља два пута, а два броја (24 и 27) три пута. Према томе, најчешћи, тзв. **модус** број су два броја 24 и 27, који се у горњем низу појављују по три пута. У средњем ретку, лијево и десно од средњих бројева 29 и 29 налази се по 8 бројева. Према томе, **медијана** је 29, овдје је то средња вриједност средишњих бројева сортираног низа.♦

Постоје још један једноставан и популаран начин записивања података, који је компромис између хистограма и листе. То је **дијаграм стабљика-лист** (енг. *stem and leaf diagram*).

Примјер 8.1.4. За бројеве 23, 45.6 и 7.89 можемо узети да је

број	„стабљика“	„лист“
23	2	3
45.6	45	6
7.89	7.8	9

Примјер 8.1.5. Сљедећих 23 двоцифрена броја

12 13 21 27 29 34 35 36 37 40 41 46 48 49 51 52 56 58 62 64 65 80 81

можемо пописати помоћу дијаграма грана-лист овако

„гране“	„листови“				
1	2	3			
2	1	7	9		
3	4	5	6	7	
4	0	1	6	8	9
5	1	2	6	8	
6	2	4	5		
8	0	1	кључ: 3 | 4 = 34		

Средишњи је 12. члан низа, а то је број 46. Према томе, медијана је 46. ♦

Задаци 8.1.6.

1. Да ли су сљедећи подаци нумерички, или су описни?

a. Резултат фудбалске утакмице.
b. Боја очију особе.
c. Раса пса.
d. Број слика у часопису.

2. Да ли су сљедећи подаци дискретни, или непрекидни?

a. Број паса у граду.
b. Дужина каиша.
c. Вријеме спринтера на 100 метара.
d. Запремина воде у литарској боци.

3. Фабрика производи 12 450 артикала сваки мјесец. Од ових, 1200 су насумице изабрани и тестирани. Тест је отркио 35 неисправних.

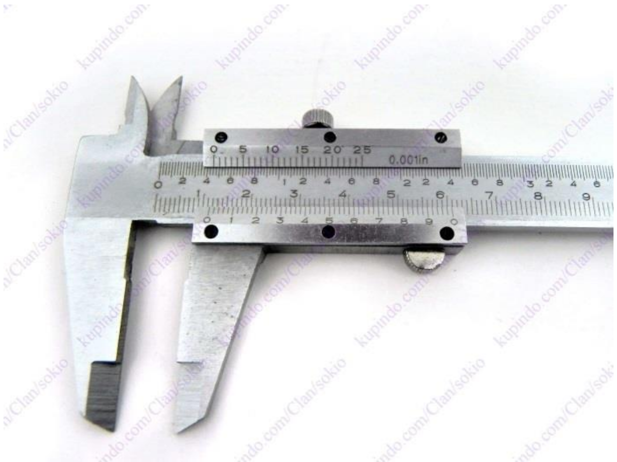
a. Колика је популација?
b. Колики је узорак?
c. Процјени укупну количину неисправних тога дана.

4. Управа рибњака покушава да процјени број рибе у базену. Први дан је ухваћено 120 риба, све су означене и враћене у базен. Након неколико дана је ухваћено је 200 риба од којих је 20 било означено.

a. Да ли је узорак довољно велик?
b. Процјените број лососа у базену.

5. Произвођач нонијуса жели да истражи квалитет својих производа. Он насумице бира 90 тих инструмената у току једног производног циклуса и налази да 6 нису довољно прецизни. Један циклус произведе 1200 ових мјерних инструмената.

a. Колика је популација?
b. Колики је узорак?
c. Процјенити укупни шкарт?
d. Колико је укупно шкарта током 20 производних циклуса?



6. Дате су висине (у центриметрима) групе од 30 ученика:

153	159	157	151	165	187	187	178	174	175
152	168	163	158	165	157	175	174	152	166
185	183	163	164	182	163	155	189	155	153

Формирати дијаграм фреквенције, интервала по 10 cm, и бар граф датих података.

7. Дате су тежине риба (у грамима) у групи од 40 риба извађених из рибњака:

240	243	225	239	226	237	243	243	247	248
247	232	242	235	233	237	238	235	248	227
248	238	237	242	247	234	237	228	234	228
236	226	229	248	234	247	238	240	238	239

Формирати дијаграм фреквенције, интервала 225-227, 228-230, 231-233, ..., и хистограм.

8. Анкета групе људи је показала да 6 испитаних највише воли гледати научну фантастику, 5 акционе филмове, по 4 драму и комедију, а 1 је одговорио ниједан од понуђених. Скицирати пита-граф резултата анкете.

9. Наћи аритметичку средину, модус и медијану у претходним задацима 6, 7 и 8.

10. Направити дијаграм грана-лист за сљедеће податке и наћи медијану

616	679	330	653	508	260	525	157	518	672	981	748
780	944	738	770	338	914	783	502	162	706	996	210
810	449	381	465	648	393	823	821	972	102	100	465

11. Бројањем зрна грашка у махунама добијена је листа:

Number of peas/pod	*Tally*	*Frequency*
1		0
2	||	2
3	卌 卌 |	11
4	卌 卌 卌 ||||	19
5	卌 卌 卌 卌 卌 ||||	29
6	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 |	51
7	卌 卌 卌 卌 卌	25
8	卌 卌 ||	12
9	|	1

Нацртати хистограм и наћи аритметичку средину, модус и медијану.♦

8.2. Дистрибуција

Ширина распростирања података узорка, или популације је сљедећи важан статистички податак.

оцјена	I	II
5	1	0
4	5	1
3	10	19
2	8	6
1	4	2

У табелама фреквенција лијево, дату су разултати двије писмене задаће. Оцјене у обе писмене задаће имају тачно једнаке средње вриједности:

- аритметичку средину ($\mu = \frac{75}{28}$),
- модус (3), и
- медијану (3).

Међутим, не можемо рећи да су резултати ових писмених тачно једнаки. Очигледно је дистрибуција оцјена је у првој писменој задаћи већа.

Најпознатије статистичке мјере дистрибуције су:

1. **интервал варијације** – разлика ($X_{max} – X_{min}$) највеће и најмање вриједности података;
2. **варијанса** – популације или узорка (σ^2 или s_{n-1}^2), је просјечно квадратно одступање свих података од њихове аритметичке средине (μ или $\bar{x}$);
3. **стандардна девијација** – популације или узорка (σ или s_{n-1}), је просјечно одступање свих појединачних података од њихове аритметичке средине;
4. **квартили** – три квартила (Q_1, Q_2, Q_3) дјеле дистрибуцију на четири једнака дијела.

Статистика је инспирисана вјероватноћом, тако да нпр. аритметичка средина долази од математичког очекивања $M(X)$, а варијанса од дисперзије $D(X)$.

У претходном примјеру, највећа оцјена у I писменој је 5, најмања 1, па је разлика, интервал варијације 4. Варијанса је $\sigma_I^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2 f_k =$

$$\frac{1}{28}\left((5-\frac{75}{28})^2 + (4-\frac{75}{28})^2 \cdot 5 + (3-\frac{75}{28})^2 \cdot 10 + (2-\frac{75}{28})^2 \cdot 8 + (1-\frac{75}{28})^2 \cdot 4\right) =$$

$$\frac{281}{252} \approx 1{,}11508.$$

Стандардна девијација је тада $\sigma_I = \sqrt{\sigma_I^2} \approx 1{,}05597.$

У II писменој је интервал варијације$X_{max} - X_{min} = 4 - 1 = 3$. Варијанса је $\sigma_{II}^2 =$

$$\frac{1}{28}\left((4-\frac{75}{28})^2 + (3-\frac{75}{28})^2 \cdot 19 + (2-\frac{75}{28})^2 \cdot 6 + (1-\frac{75}{28})^2 \cdot 2\right) =$$

$$\frac{113}{252} \approx 0{,}44841.$$

У овом случају је стандардна девијација $\sigma_{II} = \sqrt{0{,}44841} \approx 0{,}66964$. Из неједнакости $\sigma_I > \sigma_{II}$ је јасно да је дистрибуција оцјена у првој писменој задаћи већа.

Заокружено на двије децимале ($\mu = 2{,}68$), ово исто израчунавање за I и II писмену задаћу пишемо прегледно у сљедећим табелама (O – оцјена, f – фреквенција, μ -аритметичка средина):

O	f_I	$O-\mu$	$(O-\mu)^2 \cdot f_I$
5	1	2,32	5,38
4	5	1,32	8,71
3	10	0,32	1,02
2	8	-0,68	3,70
1	4	-1,68	11,29
		Укупно I:	**30,10**

$\sigma_I^2 = 1{,}08$ $\sigma_I = 1{,}04$

O	f_{II}	$O-\mu$	$(O-\mu)^2 \cdot f_{II}$
5	0	2,32	0
4	1	1,32	1,74
3	19	0,32	1,95
2	6	-0,68	2,77
1	2	-1,68	12,10
		Укупно II:	**12,10**

$\sigma_{II}^2 = 0{,}43$ $\sigma_{II} = 0{,}66$

Треће колоне ($O - \mu$) табела су одступања текуће оцјене (O) од аритметичке средине оцјена (у оба случаја је $\mu = 2{,}68$) дате (I или II) писмене задаће. У четвртој колони се резултати треће квадрирају и множе учесталошћу, фреквенцијом (f) оцјене по ретку. Збир свих бројева у четвртој колони је потписан у дну те колоне, заокружено на двије децимале. Збир свих фреквенција I или II задаће је $n = 28$.

За прву задаћу, варијанса је $\sigma^2 = \frac{30,10}{28} = 1,075 \approx 1,08$, а стандардна девијација $\sigma = \sqrt{1,08} \approx 1,04$. За другу задаћу, варијанса је $\sigma^2 = \frac{12,10}{28} = 0,432 \approx 0,43$, а стандардна девијација $\sigma = \sqrt{0,43} \approx 0,66$.

Уопште, за израчунавање варијансе и стандардне девијације **популације** користимо формуле:

$$\sigma^2 = \frac{\sum\left(f_k \cdot (x_k - \mu)^2\right)}{\sum f_k} = \frac{\sum\left(f_k \cdot x_k{}^2\right)}{n} - \mu \quad \text{и} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_k \cdot (x_k - \mu)^2}{\sum f_k}},$$

гдје је аритметичка средина популације $\mu = \frac{1}{n}\sum(f_k x_k)$, а n је број свих елемената популације.

Међутим, познавање свих елемената популације није могуће као што је то било у претходним писменим задаћама, па смо присиљени користити процјене, репрезентативне узорке датих популација. Варијанса и стандардна девијација **узорка** се израчунаваају по формулама:

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} f_k \cdot (x_k - \bar{x})^2 \quad \text{и} \quad s_{n-1} = \sqrt{s_{n-1}^2},$$

гдје је n број елемената узорка. Ради разликовања дјељење са n од дјељења са $n-1$, за варинансу узорка користимо ознаке s_n и s_{n-1}, тако да важи релација $s_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1} s_n^2$. Дакле, када је варијанса популације σ^2 непозната, недоступна, тада користимо замјену, њену процјену s_{n-1}^2.

Када интервал варијације подјелимо на четири једнака дијела, на начин да у сваком од четири дијела има једнак број елемената (популације, или узорка), тада можемо одредили **квартиле**.

Резултат који пада након 25% елемената назива се **први квартил** (тзв. доњи) и означава са Q1. Након 50% елемената добијамо резултат који се назива други квартил, или **медијана** дистрибуције. Након 75% елемената слиједи **трећи квартил** (горњи), који се означава Q3.

Примјер 8.2.1. Сортиране од најмање ка највећој, оцјене претходних писмених задаћа су:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5
1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4

Q_1 Q_2 Q_3

Од популације 28 писмених задаћа једног одјељења, четвртина је 7 писмених, половина је 14, а три четвртине су 21. Из табела видимо, да се прва четвртина завршава истом оцјеном 2 којом почиње друга четвртина, тј. Q1 = 2, за обе писмене задаће. Слично, налазимо медијану Q2 = 3 и трећи квартил Q3 = 3. Дакле, одговарајући квартили ових резултата писмених задаћа су једнаки. ♦

Примјер[35] 8.2.2. Дати су подаци о количини преузетих (*download*) материјала са интернета (у мегабајтима) у фебруару 2006. Године за 12 запослених у фирми која се бави интернет маркетингом:

28,5 17,4 15,3 12,3 19,0 22,1 19,2 20,1 15,7 20,9 22,5 25,6.

Ради одређивања квартила, сортирамо податке од најмањег ка највећем. Затим израчунавамо медијану, па „медијане“ прве и друге половине. Добијамо

12,3	15,3	15,7	17,4	19,0	19,2	20,1	20,9	22,1	22,5	25,6	28,5

Q_1 Q_2 Q_3

Медијана дистрибуције је $Q_2 = \frac{19{,}2 + 20{,}1}{2} = 19{,}65$, први квартил је $Q_1 = \frac{15{,}7 + 17{,}4}{2} = 16{,}55$, а трећи квартил $Q_3 = \frac{22{,}2 + 22{,}5}{2} = 22{,}30$. ♦

Када радимо са великим групама података онда је медијану и квартиле лакше тражити помоћу **кумулативне фреквенције**, као у сљедећем примјеру.

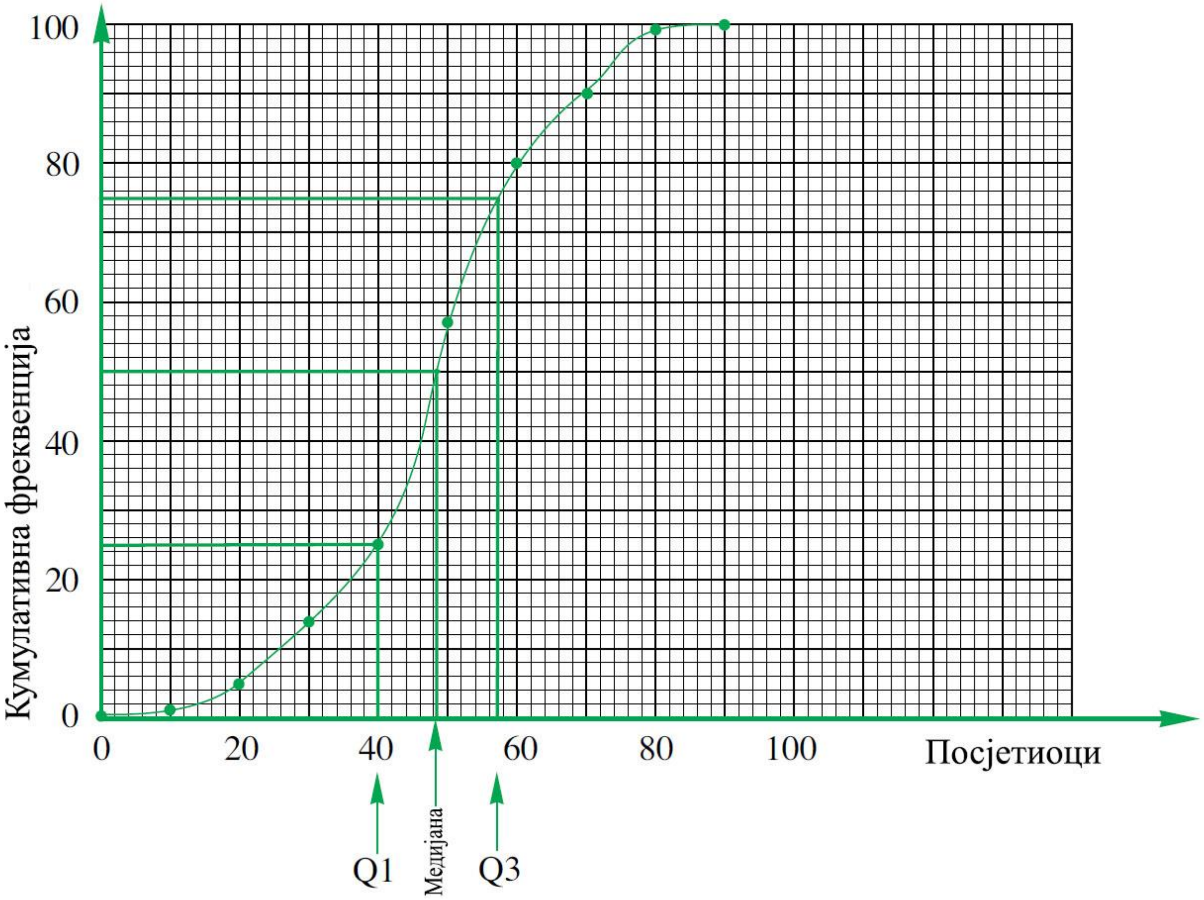
Примјер[36] 8.2.3. У једном малом биоскопу број гледалаца по пројекцијама је био:

Посјетиоци	Фреквенција	Кумулативна ф.
0-9	1	1
10-19	4	5
20-29	9	14
30-39	11	25
40-49	32	57
50-59	23	80
60-69	10	90
70-79	9	99
80-89	1	100

У току 100 пројекција, у биоскопу је само једном било мање од 9 посјетилаца, четири пута је у сали било од 10 до 19 гледалаца, девет пута их је било 20-29, ..., само једном је било 80-89 гледалаца филма. Кумулативна фреквенција је „акомулирана“ учесталост броја посјетилаца биоскопа низ табелу, у њеној трећој колони. Шрафирани број 25 значи да је у 25 пројекција у овом биоскопу број гледалаца био мањи од 40.

На сљедећој слици је крива кумулативне фреквенције, која помаже да лако „прочитамо“ процјене медијане и квартила. На хоризонталну (доле) осу наносимо бројеве посјетилаца из прве колоне претходне табеле, а на вертикалу (лијево) осу наносимо бројеве кумулативне фреквенције из треће колоне табеле. То су координате криве кумулативне фреквенције.

[35] M. Lovrić, J. Komić, S. Stević: STATISTIČKA ANALIZA (metodi i primjena), Banja Luka, 2006. str. 79
[36] Fabio Cirrito: MATHEMATICAL STUDIES SL, International Baccalaureate, IBID Press, 1998, p. 549



Затим, укупни интервал кумулативне фреквенције (овдје 100 елемената) дјелимо на четири једнака дијела (по 25% интервала) и одређујемо граничне тачке вертикалне осе. Овдје су то ординате 25, 50 и 75. Из нађених ордината вучемо паралеле до пресјека са кривом кумулативне фреквенције, чије су апсцисе редом квартиле Q_1, Q_2 и Q_3, овдје бројеви посјетилаца, приближно 40, 50 и 57. Међу-квартилни интервал је $IQR = Q_3 - Q_1 = 57 - 40 = 17$ посјетилаца.♦

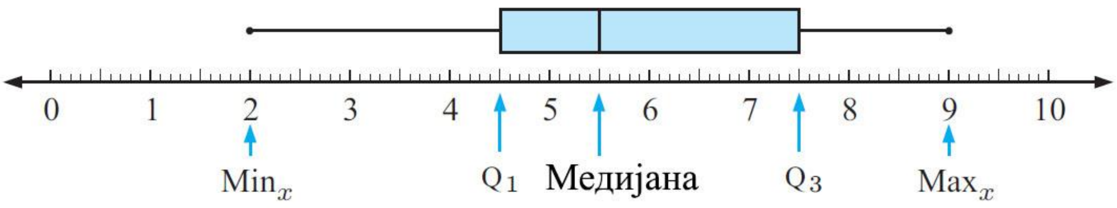
Сљедећи, такође популаран начин описивања квартила је помоћу боксплота (енг. *boxplot*). **Боксплот** показује: најмању вриједност интервала дистрибуције (Min_x), доњи квартил (Q_1), медијану (Q_2), горњи квартил (Q_3) и највећу вриједност интервала дистрибуције (Max_x).

Примјер[37] 8.2.4. Дат је скуп бројева 9, 8, 2, 3, 7, 6, 5, 4, 5, 4, 6, 8, 9, 5, 5, 5, 4, 6, 6, 8. Наћи: медијану, доњи квартил, горњи квартил и међуквартилни интервал.

Рјешење: Сортиран, дати низ је 2-3-4-4-4-5-5-5-5-5-6-6-6-7-8-8-8-9-9 (20 чланова). Медијана је број између 10. и 11. члана, тј. $Q_2 = \frac{5+6}{2} = 5{,}5$. Доња квартила је на средини прве половине сортираног

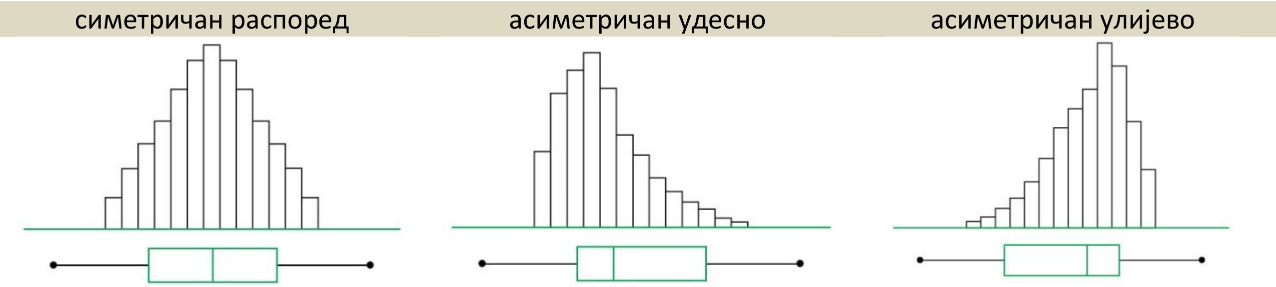
[37] M. Coad, G. Whiffen, J. Owen, R. Haese, S. Haese, M. Bruce: Mathematics for the international student, Mathematical Studies SL, International Baccalaureate Diploma Programme, Haese & Harris Publications, Australia, 2004, p. 146

низа (између 5. и 6. члана низа), тј. $Q_1 = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$. Горња квартила је на средини горње половине низа, тј. $Q_3 = \frac{7+8}{2} = 7{,}5$. Међу-квартилни интервал (*interquartile range*) = $Q_3 - Q_1 = 7{,}5 - 4{,}5 = 3$.



Ови подаци су графички представљени приложеним боксплотом: најмања вриједност је 2, доњи квартил је 4,5, медијана је 5,5, горњи квартил је 7,5, а максимум је 9. ♦

Примјетимо да у датом примјеру имамо већу развученост података десно од медијане. У том смислу, уопште, разликујемо три врсте дистрибуција:



Задаци 8.2.5.

1. У неком разреду, на првој и другој писменој задаћи су постигнути сљедећи резултати:

оцјена	I	II
5	0	3
4	1	4
3	5	9
2	10	6
1	7	5
-	7	3

i. Наћи μ_{I} и μ_{II}
ii. Наћи σ_{I}^2 и σ_{II}^2
iii. Наћи стандардне девијације оцјена
iv. Наћи квартиле.

Напомена: На првој (другој) писменој 7 (3) од 30 ученика нису били присутни.

[2, $\frac{25}{9}$; $\frac{8}{11}$, $\frac{61}{39}$; 0.85, 1.25; 1, 2; 2, 3; 3, 4]

2. Тежине (kg) два узорка A и B пакованог шећера узетог са производне траке су:

A:

1.95	1.94	2.02	1.94	2.07	1.95	2.02	2.06
2.09	2.09	1.94	2.01	2.07	2.05	2.04	1.91
1.91	2.02	1.92	1.99	1.98	2.09	2.05	2.05
1.99	1.97	1.97	1.95	1.93	2.03	2.02	1.90
1.93	1.91	2.00	2.03	1.94	2.00	2.02	2.02
2.03	1.96	2.04	1.92	1.95	1.97	1.97	2.07

B:

1.77	2.07	1.97	2.22	1.60	1.96	1.95	2.23
1.79	1.98	2.07	2.32	1.66	1.96	2.05	2.32
1.80	1.96	2.06	1.80	1.93	1.91	1.93	2.25
1.63	1.97	2.08	2.32	1.94	1.93	1.94	2.22
1.76	2.06	1.91	2.39	1.98	2.06	2.02	2.23
1.75	1.95	1.96	1.80	1.95	2.09	2.08	2.29

За сваки од узорака A и B посебно, наћи:

i. аритметичке средине тежина пакетића;

ii. стандардне девијације (узорака) $s_{n-1} = \sqrt{\dfrac{\sum f_k \cdot (x_k - \bar{x})^2}{\sum f_k - 1}}$;

iii. стандардне девијације (популације) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_k \cdot (x_k - \mu)^2}{\sum f_k}}$.

[1.99, 2.00; 0.0552, 0.1877; 0.0547, 0.1858]

3. Број путника у једном аутобусу током седмице био је:

Путника:	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29
Фрекве.:	2	7	10	13	12	6

i. Наћи аритметичку средину броја путника по вожњи.

ii. Наћи стандардну девијацију (популације) броја путника по вожњи.

iii. Нацртати граф кумулативне фреквенције и наћи квартиле.

[16.44; 6.74; 12, 17, 22]

4. Дат је граф непрекидних података.

i. Нацртати граф кумулативне фреквенције.

ii. Одредити квартиле.

iii. Нацртати боксплот.

iv. Која је ово врста дистрибуције?

Напомена: средине интервала су дискретни подаци.

Скор	Фреквенција
1 – 9.99	3
10 – 19.99	11
20 – 29.99	25
30 – 39.99	36
40 – 49.99	31
50 – 59.99	14

5. За сљедеће стабљика-лист дијаграме написати податке, наћи медијане и нацртати боксплотове:

0	1 2 2 3
1	0 1 1 2 3 4 5
2	2 3 3 6
3	1 5
4	7

кључ: 2|3 ⇔ 23

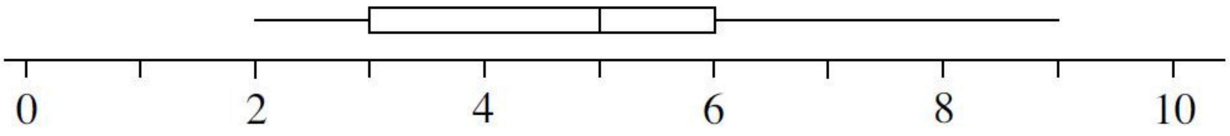
50	1 3 6
50	0 1 5 6 7 8
60	2 5 5
60	4

кључ: 50|3 ⇔ 53

10	0 1 2 3
20	2 3 4 7 8 0
30	1 3 4
40	2 6
50	9

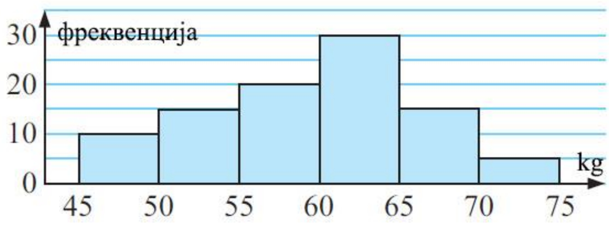
кључ: 20|3 ⇔ 203

6. Резултати (од 0 до 10 бодова) тестирања групе 200 ученика дати су сљедећим дијаграмом:



i. Наћи број ученика са више од 6 бодова.
ii. Наћи медијану.
iii. Колики је најмањи број бодова?
iv. Процјените вриједност аритметичке средине.
v. Процјените стандардну девијацију дистрибуције.

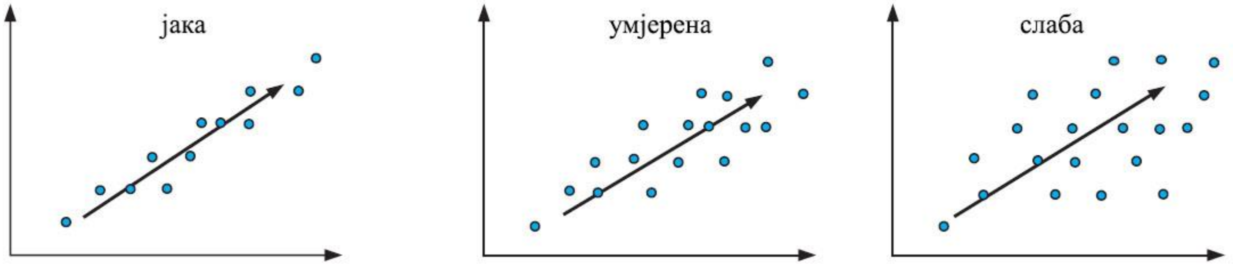
7. Хистограм десно приказује тежине (у килограмима) групе ученика једне школе.



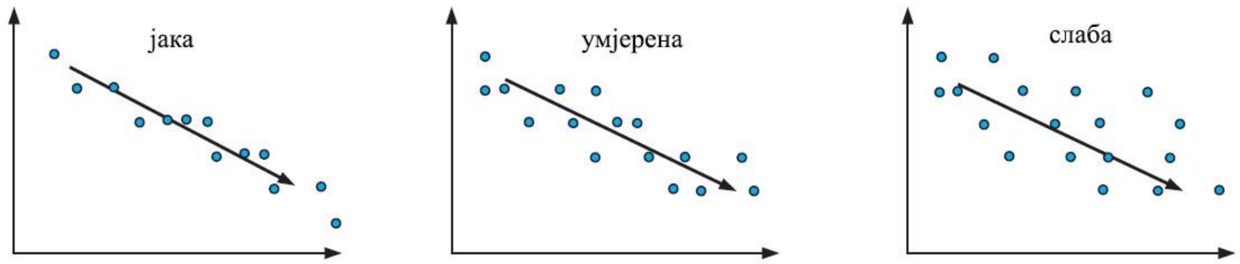
i. Колико је ученика обухваћено?
ii. Наћи аритметичку средину.
iii. Нацртати боксплот дијаграм.
iv. Колико је ученика лакше од 56 kg?
v. Који проценат ученика има 50-60 kg?
vi. Каква је шанса да насумице извучен ученик има мање од 60 kg?
vii. Израчунати варијансу и стандардну девијацију.

8.3. Регресија

Проучавајући расподјеле вјероватноћа и дисперзију дефинисали смо **корелацију** као врсту линеарне повезаности између двије случајне промјенљиве (в. примјер 7.4.11.). Рекли смо да корелација може бити растућа (позитивна)



или опадајућа (негативна)



Међутим, корелација између двије варијабле не значи нужно да су оне зависне једна од друге. На примјер, мјерењем је добијено да дужина руке и брзина трчања групе ученика јесу у јакој позитивној корелацији, али промјене брзине трчања тренингом не утичу на промјену дужине руку.

Регресија је метод уклапања праве линије у скуп података и налажење једначине те линије. Регресија се обично назива „линија најбољег подударања“. Разматраћемо два таква поступка:

- Регресија „од ока“ , и
- Метода најмањих квадрата.

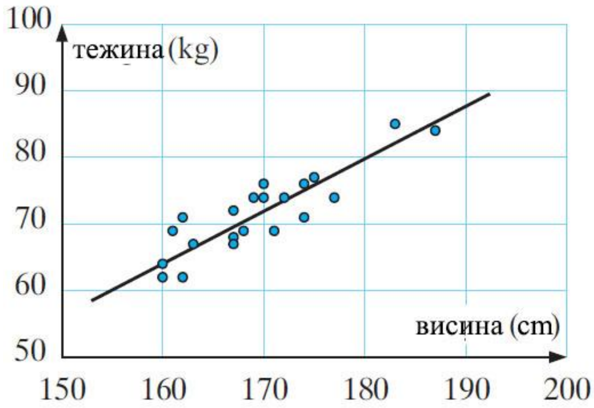
Примјер 8.3.1. На слици десно, „од ока“ ћемо цртати линију

$$y = kx + n$$

која би требало да се уклапа у тачке чије су координате висина x (у центиметрима) и тежина y (у килограмима) групе фудбалера.
Из аналитичке геометрије знамо да су коефицијенти ове праве линије дати са

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ y - y_1 = k(x - x_1)$$

гдје су $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ двије тачке на правој.



Када су ове тачке играчи $A(160, 64)$ и $B(190, 88)$, тада је $k = \frac{88-64}{190-160} = 0.8$, па једначина праве слиједи из $y - 64 = 0.8(x - 160)$, тј. тражена права је $y = 0.8x - 64$.

Бољу процјену „од ока“ добијамо бољим избором тачака A и B, а још бољу израчунавањем коефицијената корелације и употребом формула које сљеде.

Пеарсонов коефицијент корелације, за налажење степена линеарне повезаности двије случајне промјенљиве X и Y, када је дато n уређених парова (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) дат је са

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \quad \text{гдје је} \quad s_{xy} = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}$$ - коваријанса X и Y,

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2}$$ - стандардна девијација *X*,

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum (y-\bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \bar{y}^2}$$ - стандардна девијација *Y*.

Према томе, коефицијент корелације за статистички узорак је

$$r = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum (x-\bar{x})^2}\sqrt{\sum (y-\bar{y})^2}}, \text{ или } r = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum x^2 - n\bar{x}^2}\sqrt{\sum y^2 - n\bar{y}^2}}.$$

Нема корелације	$r^2 = 0$
Веома слаба корелација	$0 < r^2 \le 0{,}25$
Слаба корелација	$0{,}25 < r^2 \le 0{,}50$
Умјерена корелација	$0{,}50 < r^2 \le 0{,}75$
Јака корелација	$0{,}75 < r^2 \le 0{,}90$
Веома јака корелација	$0{,}90 < r^2 < 1$
Потпуна корелација	$r^2 = 1$

Табела лијево помаже у оцјењивању јачине корелације помоћу вриједности квадрата коефицијента корелације (r^2). То су оцјене које варирају од аутора до аутора.

Остају питања како израчавамо ове бројеве помоћу наведених формула и како их искористити за добијање регресије.

Примјер 8.3.2. Произвођач ђубрива је упоређивао додавање компоненте (*X* у грамима) на четири травњака са дневним растом траве (*Y* у милиметрима). Резултати су дати табелом:

Травњак:	I	II	III	IV
Компонента *X* [g]:	1	3	5	6
Прираст траве *Y* [mm] :	2	3	6	6

Тражимо Пеарсонов коефицијент корелације.

Рјешење: Имамо $n = 4$ уређена пара, $\sum x = 15$, $\sum y = 17$, $\sum xy = 77$, $\sum x^2 = 71$, $\sum y^2 = 85$.

То прегледно израчунавамо допуњавањем дате табеле рецима *xy*, x^2, y^2 и њиховим збировима:

Травњак:	I	II	III	IV	Σ
x [g]:	1	3	5	6	15
y [mm] :	2	3	6	6	17
xy	2	9	30	36	77
x^2	1	9	25	36	71
y^2	4	9	36	36	85

Затим налазимо коефицијент корелације $r = \dfrac{77 - 4\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{17}{4}}{\sqrt{71-4\cdot\left(\frac{15}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{85-4\cdot\left(\frac{17}{4}\right)^2}} = \dfrac{53}{\sqrt{59}\cdot\sqrt{51}} \approx 0{,}966$. Квадрат овог броја је $r^2 \approx 0{,}934$ што указује на веома високу позитивну корелацију.♦

Примјер 8.3.3. Произвођач заштите биља тестирао је на пет травњака утицај количине нове хемикалије (X у грамима) на број преживјелих буба (Y) по квадратном метру парцеле. Доби је парове (2, 10), (3, 7), (7, 5), (4, 6) и (9, 4). Наћи коефицијент корелације.

Рјешење: Дати подаци су у првој и другој колони табеле десно. Слично претходном примјеру, дате колоне допуњававо колонама xy, x^2 , y^2, и збиром колоне у дну. Налазимо $\sum x = 25$, $\sum y = 32$, $\sum xy = 136$, $\sum x^2 = 159$, $\sum y^2 = 226$. Затим

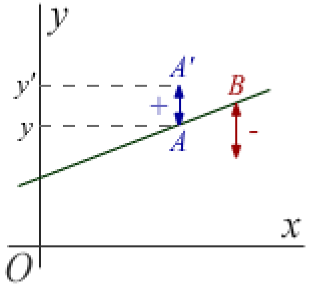
x	y	xy	x^2	y^2
2	10	20	4	100
3	7	21	9	49
7	5	35	49	25
4	6	24	16	36
9	4	36	81	16
25	32	136	159	226

$$r = \frac{136 - 5\cdot\frac{25}{5}\cdot\frac{32}{5}}{\sqrt{159-5\cdot 5^2}\cdot\sqrt{226-5\cdot\left(\frac{32}{5}\right)^2}} = -12\cdot\sqrt{\frac{5}{901}}$$

$\approx$ -0,894. Из $r^2 \approx 0{,}799$ видимо да имамо јаку негативну корелацију између количине употребљене хемикалије и броја преживјелих буба у травњаку.♦

Вратимо се опет на први примјер (8.3.1), гдје смо имали јаку позитивну корелацију између висине и тежине играча. Тада смо најбољу линеарну апроксимацију, регресију радили „од ока“. На тај начин нисмо сигурни да ли би у другом покушају могли добити бољу апроксимацију, нити шта то уопште значи боља апроксимација.

Да би разумјели регресију методом најмањих квадрата, прво погледајмо шта су то **остаци** (енг. *residuals*). На графу лијево, остатак је разлика $\Delta y = y' - y$ ордината тачака A' и A са истом апсцисом. Тачка A' је дато обиљежје, елеменат узорка, а тачка A је на могућој линији $y = kx + n$.



Остатак је позитиван (негативан) када је позитивна (негативна) разлика $y'' - y'$. Другим рјечима, ако је обиљежје, тј. дата тачка изнад (испод) могуће регресионе линије, тада је остатак позитиван (негативан). На датој слици, у тачки A је позитиван, а у тачки B негативан остатак.

Нека су дата статистичка обиљежја, варијабле $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ и $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$, а тражимо параметре k и n могуће праве $y = kx + n$. За свако x'_i дефинишемо број $y_i = k x'_i + n$ који припада могућој правој. Формирамо разлику одговарајуће варијабле другог датог низа и тог броја $\Delta y_i = y' - y_i$, тј. формирамо низ остатака. Квадрат $(\Delta y_i)^2$ и позитивног и негативног остатка је позитиван. Тражимо такве параметре k и n праве да је збир квадрата $(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + \dots + (\Delta y_n)^2$ минималан. Резултат ће бити линеарна апроксимација методом најмањих квадрата. Доказ ћемо извести из теорије вјероватноће (в. 7.4 Дисперзија: коефицијент корелације).

Став 8.3.4. Када Y апроксимирамо линеарном функцијом $\alpha X + \beta$, грешка апроксимације, математичко очекивање квадрата разлике $[Y - (\alpha X + \beta)]^2$ је најмање, ако и само ако

$$Y = \rho_{X,Y}\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}[X - M(X)] + M(Y).$$

Доказ: Функција

$$f(\alpha,\beta) = M[Y - (\alpha X + \beta)]^2 \qquad (1)$$

која зависи од параметара α и β је грешка апроксимације. Она има минимум за оне вриједности α и β које су рјешења система парцијалних диференцијалних једначина

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0. \qquad (2)$$

Када развијемо десну страну једначине (1) добијамо $f(\alpha,\beta) = M(Y^2) + \alpha^2 M(X^2) + \beta^2 - 2\alpha M(XY) - 2\beta M(Y) + 2\alpha\beta M(X)$. Послије сређивања, систем (2) постаје

$$\begin{cases} \alpha M(X^2) + \beta M(X) = M(XY), \\ \alpha M(X) + \beta = M(Y). \end{cases} \qquad (3)$$

Ово је линеарни систем једначина по α и β који увије има једнозначно рјешење, јер је детерминанта система различита од нуле, наиме

$$\begin{vmatrix} M(X^2) & M(X) \\ M(X) & 1 \end{vmatrix} = M(X^2) - [M(X)]^2 = D(X) > 0.$$

Рјешења α и β система (3) послије краћег израчунавања дају тражени резултат.♦

Вриједности α и β које су рјешење система (3) представљају најбољу линеарну апроксимацију $\alpha X + \beta$ случајне промјенљиве *Y* помоћу *X*. Та функција се зове линеарна регресија *Y* на *X* . Резултат описане минимизације је статистичка формула

$$y - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \bar{x}).$$

То је регресиона права добијена методом најмањих квадрата.

Примјер 8.3.5. Користимо формулу линеарне регресије за налажење праве која најбоље одговара тачкама A'(1,4), B'(2,5) и C'(4,7).

Формирамо табелу датих и придружених података. У дну су збирови колона. Израчунавамо редом

x	y	xy	x^2
1	4	4	1
2	5	10	4
4	7	28	16

$$\sum x = 7,\ \sum y = 16,\ \sum xy = 42,\ \sum x^2 = 21,\ n = 3.$$

$$s_{xy} = \sum xy - \frac{\left(\sum x\right)\cdot\left(\sum y\right)}{n} = 42 - \frac{7\cdot 16}{3} = \frac{14}{3},$$

7	16	42	21

$s_x^{\ 2} = \sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n} = 21 - \frac{7^2}{3} = \frac{14}{3}$, $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{7}{3}$, $\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{16}{3}$. Затим имамо

$y - \frac{16}{3} = \frac{14/3}{14/3}\left(x - \frac{7}{3}\right)$, тј. $y = x + 3$.♦

Познајући линију регресије, можемо на основу претпоставке о варијабли *x* предвиђати (нагађати) вјероватну вриједност варијабле $y = kx + n$. Ако је *x* унутар варијације (од x_1 до x_n) датих података прве варијабле, тада се такав поступак предвиђања назива **интерполација**, а ако је *x* изван варијације, поступак се назива **екстраполација**.

Примјер 8.3.6. Наћи линију регресије података:

x	2	4	5	7	9	10	11	15
y	3	4	6	6	7	9	10	11

Рјешење:

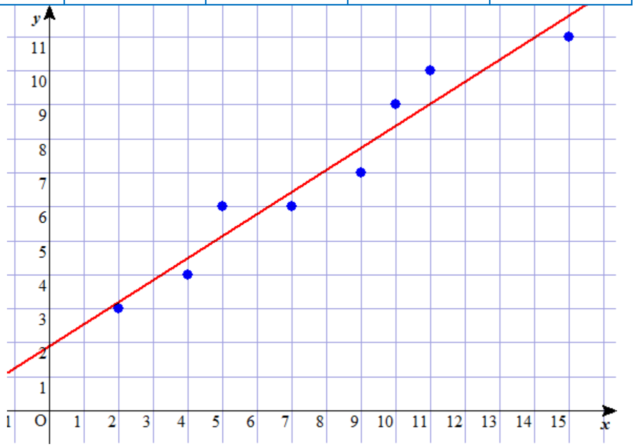
$$k = \frac{\sum xy - \frac{1}{n}\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sum x^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x\right)^2} = \frac{522 - \frac{1}{8}\cdot 63\cdot 56}{621 - \frac{1}{8}\cdot(63)^2} =$$

$\frac{24}{37} \approx 0{,}648649$,

$n = \bar{y} - k\bar{x} = \frac{56}{8} - \frac{24}{37}\cdot\frac{63}{8} = \frac{70}{37} \approx 1{,}89189$,

$y = kx + n$, односно

$y = 0{,}65\cdot x + 1{,}89$.♦



Примјер 8.3.7. Да ли су дати подаци *X* и *Y* у корелацији. Које врсте?

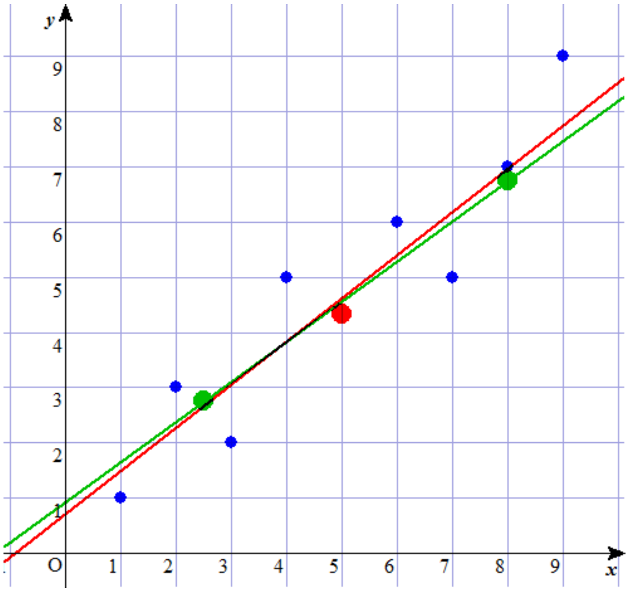
x	1	2	3	4	6	7	8	9
y	1	3	2	5	6	5	7	8

i. Наћи средње тачке доње (*x*: 1-4) и горње (*x*: 6-9) групе и формирати регресију „од ока“.
ii. Наћи линију регресије методом најмањих квадрата.
iii. Нацртати дате тачке, и претходне двије линије регресије.
iv. Којем *y* одговара податак *x* = 5?

Рјешење: Коефицијент корелације је

$$r=\frac{\sum xy-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum x^2-n\bar{x}^2}\sqrt{\sum y^2-n\bar{y}^2}}=\frac{232-8\cdot\frac{40}{8}\cdot\frac{38}{8}}{\sqrt{260-8\cdot 5^2}\sqrt{213-8\cdot\left(\frac{19}{4}\right)^2}}=\frac{47}{5}\sqrt{\frac{2}{201}}\approx 0,93766.$$ Квадрат овог (позитивног) броја је $r^2 \approx 0{,}88$ што значи да имамо јаку позитивну корелацију.

i. $\bar{x}_1=\frac{1+2+3+4}{4}$, $\bar{y}_1=\frac{2+3+2+5}{4}$, па је доња средња тачка $A_1\left(\frac{10}{4},\frac{11}{4}\right)$.



Слично је $\bar{x}_2=\frac{6+7+8+9}{4}$, $\bar{y}_2=\frac{6+5+7+9}{4}$, па је горња средња тачка $A_2\left(\frac{32}{4},\frac{27}{4}\right)$. Уврштавањем у једначину праве кроз двије тачке $y-\bar{y}_1=\frac{\bar{y}_2-\bar{y}_1}{\bar{x}_2-\bar{x}_1}(x-\bar{x}_1)$ добијамо $y-\frac{11}{4}=\frac{\frac{27}{4}-\frac{11}{4}}{\frac{32}{4}-\frac{10}{4}}\left(x-\frac{10}{4}\right)$, односно $y=\frac{8x}{11}+\frac{41}{44}$, тј. приближну праву y = 0,73x + 0,93 (зелена на горњем графу).

ii. Методом најмањих квадрата добијамо праву y = 0,708x + 0,783 (црвена права).

iii. Интерполацијом, за x = 5 налазимо y = 0,708x + 0,783 = 4,323 (црвена тачка). ♦

Задаци 8.3.8.

1. Да ли су дати подаци X и Y у корелацији. Које врсте?

x	2	4	5	7	9	10	11	15
y	3	4	6	6	7	9	10	11

i. Наћи средње тачке доње (x: 1-4) и горње (x: 6-9) групе и формирати регресију „од ока“.
ii. Наћи линију регресије методом најмањих квадрата.
iii. Нацртати дате тачке, и претходне двије линије регресије.
iv. Којем y одговара податак x = 1?

[Σx = 63, Σy = 56, Σxy = 522, Σx^2 = 621, Σy^2 = 448, r = 0,9686, ...]

2. Десет студената раде тест из математике (x) и биологије (y). Резултати су у табели:

x	56	91	84	63	10	63	28	35	91	63
y	66	100	60	96	24	46	35	36	72	80

i. Наћи коваријансу $s_{xy} = \frac{1}{n}\left(\sum xy - n\overline{x}\overline{y}\right)$ и провјерити да ли је s_{xy} = 493,78.

ii. Наћи коефцијент корелације $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$ и провјерити да ли је $r = \frac{493,78}{(25,81549)(24,79213)}$ = 0,7715.

iii. Провјерити да ли је r^2 = 0,60. Које је врсте ова корелација?

iv. Наћи линију регресије.

v. Нацртати дате тачке и линију у истом систему координата.

3. Мјерењем фреквенцијезвука (*y*) који производе цврчци, у броју цврчања у 15 секунди, на различитим температурама (*x* °C), добијена је табела:

x	16,7	16,1	15,6	15,0	14,4	12,8	11,7	11,1	10,0
y	24	21	19	18	19	15	15	12	11

i. Помоћу формуле $y - \overline{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \overline{x})$, гдје $\frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{s_y}{s_x} \cdot r$, наћи линију регресије.

ii. Процјенити фреквенцију цврчања на температури 18,3°.

iii. Нацртати дијаграм датих тачака и добијене линије регресије.

[$\bar{x}$ = 56,6667, $\bar{y}$ = 17,1111, s_x = 4,0551, s_y = 3,9845,
r = 0,9686, y = 0,9482x – 36,6215]

4. Током шест мјесеци прикупљани су подаци о падавинама кише (у mm) упоредо са потражњом њихове робе (у тонама), једне фирме за производњу фунгицида. Нажалост, табела са тим подацима је дјелимично оштећена, али је остао сљедећи дио:

Падавине (mm)	11	-	25	27	48	-
Потражња (t)	-	38	28	-	51	81

Поред табеле, сачувани су и резултати:

$$\sum x = 180,\ \sum y = 270,\ \sum (x-\bar{x})^2 = 1240,\ \sum (y-\bar{y})^2 = 2554,\ \sum xy = 9592.$$

i. Наћи коефицијент корелације датих података.

ii. Наћи регресију методом најмањих квадрата.

iii. На основу регресије попунити табелу.

5. Двије фабричке траке производе одређени артикал. Капацитет производње прве траке је 5, друге је 3 артикла. Претпостављамо да су бројеви произведених артикала на свакој од трака случајни, а (*X*,*Y*) је производња прве и друге траке са расподјелом вјероватноћа:

Y \ *X*	0	1	2	3	4	5	Σ
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Σ	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,08	1

i. Наћи вјероватноћа догађаја A: „да прва трака производи више од друге“.

ii. Наћи вјероватноћу догађаја B: „да прва трака производи мање од 3“.
iii. Наћи регресију и израчунати грешку апроксимације (в. став 8.3.4.).

[i. $p(A) = p(X>Y) = \sum p(i,j) = 0{,}01 + 0{,}03 + 0{,}05 + \dots + 0{,}05 = 0{,}75$.

ii. $p(B) = p(X<3) = \sum_{i<3} p(i,j) = 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}01 + \dots + 0{,}04 = 0{,}27$]

6. Методом примјењеном у ставу 8.3.4. одредити коефицијенте α, β и γ квадратне регресије, тј. одредити те бројеве тако да математичко очекивање $M[Y - (\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma)]^2$ буде најмање. Да ли је у оптем случају квадратна регресија боља од линеарне?

8.4. Тестирање

Укратко, дефинишемо појам статистичког тестирања, затим упознајемо пар таквих популарних примјера: хи-квадрат тест и табелу контингенције.

Статистичка хипотеза је исказ о популацији. При томе мислимо на исказе који се могу провјеравати методама статистике, сатистичким закључивањем, када полазећи од узорка говоримо о читавој популацији. Онај дио статистичког закључивања који користи податке узорка за евалуацију истинитости хипотеза о популацији називамо **тестирање хипотезе**, док је **оцјењивање** процес кориштења информација из случајног узорка у циљу доношења закључака о вриједности неког популационог параметра.

Хи-квадрат (χ^2) тест[38] се користи за провјеравање независности два случајна низа. Мјера узајамних одступања два низа (a_k) и (b_k) исте дужине ($k = 1, 2, \dots, s$) је број, збир

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{s} \frac{(a_k - b_k)^2}{b_k}.$$

Мали број χ^2 указује на независност варијабли (a_k) и (b_k). Обрнуто, већи резултат χ^2 указује на веће расипање, одступање, тј. различитост расподјела двају низова.

Нулта хипотеза H_0: „два низа су независна“ је прихватљива, ако је израчунати број χ^2 мали. У супротном случају, ако је број χ^2 превелик, одбацујемо нулту хипотезу и прихватамо хипотезу H_1 да постоји нека релација између низова.

При томе је неизбјежно питање **степена поузданости** , јер овдје ипак радимо са вјероватноћама. Са коликом поузданошћу желимо да изведемо закључак? Ако је наш закључак сигуран у 95% (сличних) случајева, тада ћемо погрјешити са вјероватноћом $\alpha = 0{,}05$.

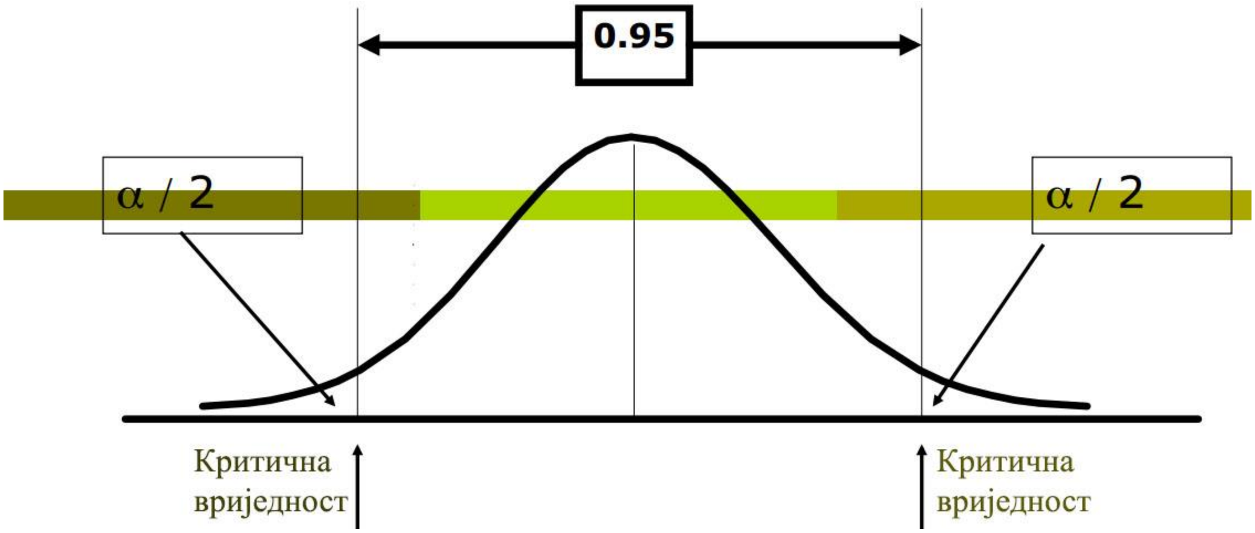
Када оцјенимо да са вјероватнћом α (рецимо $\alpha = 0{,}05$) нулту хипотезу треба одбацити, онда је са вјероватноћом $1 - \alpha$ прихватамо. При томе су могуће двије **врсте грешака**:

1. одбацили смо тачну хипотезу,

[38] http://www.elemenat.com/cyr/wiki/index.php?title=Хи-квадрат_тест

2. прихватили смо нетачну хипотезу.

Узимајући број α што већи (умјесто α = 0,05 узмемо нпр. α = 0,10) више ризикујемо да правимо грешку прве врсте. Обратно, бирајући мањи број α (нпр. α = 0,01), правимо већу грешку друге врсте.



Табела контингенције (енг. *contingency table*) је унакрсна табела (матрица типа $m \times n$) расподјеле фреквенција статистикчих варијабли. Израз је први употребио Пеарсон[39] и од тада је веома популаран у тражењу зависности садржане у двије или више статистичких варијабли.

Нека варијабла X_i за i = 1, 2, …, m узима вриједности a_{i1}, a_{i2}, …, a_{in}, а варијабла Y_j за j = 1, 2, …, n узима вриједности a_{1j}, a_{2j}, …, a_{mj}. Прво израчунавамо збирове $\sum X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ и $\sum Y_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ и, ради контроле, провјеримо да ли је $\sum X_i = \sum Y_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum XY$.

Тако формирамо табелу (A) **опажених вриједности**[40]:

A	Y_1	Y_2	…	Y_n	
X_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$\sum X_1$
X_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$\sum X_2$
…	…	…	…	…	…
X_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	$\sum X_m$
	$\sum Y_1$	$\sum Y_2$	…	$\sum Y_n$	$\sum XY$

[39] Karl Pearson: On the Theory of Contingency and Its Relation to Association and Normal Correlation, 1904.
[40] енг. observed value table

Затим израчунавамо коефицијенте $b_{ij} = \frac{\left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_j\right)}{\sum XY}$ табеле (B) **очекиваних вриједности**[41]:

B	Y_1	Y_2	…	Y_n	
X_1	b_{11}	b_{12}	…	b_{1n}	$\sum X_1$
X_2	b_{21}	b_{22}	…	b_{2n}	$\sum X_2$
…	…	…	…	…	…
X_m	b_{m1}	b_{m2}	…	b_{mn}	$\sum X_m$
	$\sum Y_1$	$\sum Y_2$	…	$\sum Y_n$	$\sum XY$

Такође ради контроле, провјеримо да ли су маргинални збирови табеле B једнаки са одговарајућим маргиналним збировима табеле A. Наиме, сабирањем свих коефицијената ретка i= 1, 2, …, m табеле B добијамо

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}\right)}{\sum XY} = \frac{\sum_{l=1}^{n} a_{il}}{\sum XY} \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}\right) = \frac{\sum_{l=1}^{n} a_{il}}{\sum XY} \cdot \sum XY = \sum_{l=1}^{n} a_{il} = \sum X_i \,.$$

Слично доказујемо једнакост маргиналног збира коефицијената одговарајућих колона табела.

Табеле опажених (A) и очекиваних (B) вриједности нам требају за формирање збира

$$\chi^2 = \sum_{ij} \frac{(a_{ij} - b_{ij})^2}{b_{ij}} \,.$$

Испоставља се да је ово статистика приближно једнака дистрибуцији познатој под називом хи-квадрат (χ^2) тест, која зависи само од **броја степени слободе**[42]:

$$\upsilon = (m-1)(n-1) \,.$$

Наиме, у табели имамо m случајних варијабли X_i и n случајних варијабли Y_j. Да бисмо познавали расподјелу варијабли X_i довољно је познавати само m – 1 вјероватноћу, јер се посљедња m-та може израчунати из претходних m – 1. Такође, довољно је позанвати n – 1 вјероватноћу варијабли Y_j. Према томе, број степени слободе овакве 2-дим случајне варијабле је $\upsilon = (m-1)(n-1)$.

Након израчунавања бројеве χ^2 и υ, опредјељујемо се за **степен поузданости**[43] α (рецимо 5%) и у некој од таблица χ^2 –теста[44] налазимо број $\chi^2_\alpha(\upsilon)$.

---

[41] енг. expected value table
[42] енг. degrees of freedom (df)
[43] енг. significance levels
[44] нпр. http://www.medcalc.org/manual/chi-square-table.php

υ	1	2	3	4	5	6	15
α = 0.01	6.635	9.210	11.345	13.277	15.086	16.812	37.697
α = 0.05	3.841	5.991	7.815	9.488	11.07	12.59	24.996
α = 0.10	2.706	4.605	6.251	7.779	9.236	10.645	22.307

Из приложеног дијела табеле χ^2 –теста видимо да за исти број степени слободе (υ), вриједност $\chi^2_\alpha(\upsilon)$ опада са порастом степена поузданости (α).

Нулта хипотеза H_0: „подаци X и Y су узајамно независни“ је тачна када је χ^2 мали број, јер су тада разлике између измјерених и очекиваних вриједности мале. Обратно, нулта хипотеза је нетачна, када је број χ^2 велик, јер су се разлике опажених и очекиваних вриједности „разишле“.

Практично, ако је $\chi^2 < \chi^2_\alpha(\upsilon)$ тада прихватамо нулту хипотезу, са степеном значајности α који указује на ниво грешке наше оцјене. Уобичајено се за ниво значајности узима 1%, 5% и 10%. Обратно, ако је $\chi^2 > \chi^2_\alpha(\upsilon)$ тада са поменутим степеном значајности одбацујемо нулту хипотезу.

Запамтимо да табела контингенције уобичајено представља узорак, а не популацију.

Примјер 8.4.1. Урађен је тест са 400 особа са по два питања, да ли је особа пушач и има ли рак плућа. Подаци су прослијеђени у табелу контингенције (типа 2×2), табелу А обзервабли:

А	Има рак	Нема рак	
Пушач	32	188	220
Непушач	4	176	180
	36	364	400

Дефинишемо нулту хипотезу H_0: „пушење и рак су независни“.

Затим израчунавамо коефицијенте очекиваних фреквенција

$b_{11} = \frac{220\cdot 36}{400} = 19.8$, $b_{12} = \frac{220\cdot 364}{400} = 200.2$, $b_{21} = \frac{180\cdot 36}{400} = 16.2$, $b_{22} = \frac{180\cdot 364}{400} = 163.8$ за табелу В:

В	Има рак	Нема рак	
Пушач	19.8	200.2	220
Непушач	16.2	163.8	180
	36	364	400

Коефицијенте ових табела уврштавамо у статистику $\chi^2 = \sum_{ij} \frac{(a_{ij} - b_{ij})^2}{b_{ij}} =$

$$\frac{(32-19.8)^2}{19.8} + \frac{(188-200.2)^2}{200.2} + \frac{(4-16.2)^2}{16.2} + \frac{(176-163.8)^2}{163.8} =$$

$$7.5171 + 0.7435 + 9.1877 + 0.9087 = 18.36.$$

Дакле χ^2 = 18,36. Број степени слободе је υ = (2 – 1)(2 – 1) = 1. Узимамо ниво значајности α = 0.05, и у таблици χ^2 –теста налазимо $\chi^2_{0.05}(1)$ = 3.841. Према томе $\chi^2 > \chi^2_{0.05}(1)$, што значи да одбацујемо нулту хипотезу, да су пушење и рак независни. Дакле, постоји зависност пушења и добијања рака.♦

Примјер 8.4.2. Случајно изабраним ученицима неке гимназије постављено је питање да ли треба мјењати школску кухињу. У првом, другом, трећем и четвртом разреду одговори (да, не) су били, редом: (7, 14), (9, 12), (13, 9), (14, 7). На нивоу 5% тестирати да ли постоји значајна разлика у жељама ученика за промјеном школске кухиње у четири разреда.

Рјешење: Нулта хипотеза је: H_0 – „разреди и промјене су независни". Број степени слободе је υ = (4 – 1)(2 – 1) = 3. Ниво значајности је 5%, или 0,05. Одбацићемо H_0 ако је χ^2 > 7,815. Табеле контингенције су:

A	1.	2.	3.	4.	Σ
Да	7	9	13	14	43
Не	14	12	9	7	42
Σ	21	21	22	21	85

B	1.	2.	3.	4.	Σ
Да	10,6	10,6	11,1	10,6	43
Не	10,4	10,4	10,9	10,4	42
Σ	21	21	22	21	85

Даље, израчунавамо корак по корак:

A	B	$a_{ij} - b_{ij}$	$(a_{ij} - b_{ij})^2$	$\frac{(a_{ij} - b_{ij})^2}{b_{ij}}$
7	10,6	-3,6	12,96	1,223
9	10,6	-1,6	2,56	0,242
13	11,1	1,9	3,61	0,325
14	10,4	3,4	11.56	1,091
14	10,4	3,6	12,96	1,246
12	10,4	1,6	2,56	0,246
9	10,9	-1,9	3,61	0,331
7	10,4	-3,4	11,56	1,112
		Укупно:		5,816

Добили смо χ^2 = 5,816
што је мање од табличног 7,815.

Досљедно томе, прихватамо H_0, тј. да нема значајне разлике међу одговорима ученика у различитим разредима (1 – 4).♦

Примјери 1. и 2. су из уџбеника за Међународну матуру, наведених у претходном параграфу.

Примјер 8.4.3. У задатку 8.3.8.5. дата је расподјела 2-дим промјенљиве (X,Y):

$Y \setminus X$	0	1	2	3	4	5	Σ
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Σ	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1

Тестирати хипотезу H_0: „координате X и Y су независне случајне варијабле".

Рјешење: Сада су опажене вриједности дате табеле (A) вјероватноће. Свеједно, на исти претходни начин формирамо табелу (B) очекиваних вриједности:

B	0	1	2	3	4	5	Σ
0	0,008	0,020	0,040	0,052	0,060	0,070	0,25
1	0,008	0,021	0,042	0,055	0,062	0,073	0,26

2	0,075	0,020	0,040	0,052	0,060	0,070	0,25
3	0,007	0,019	0,038	0,050	0,058	0,067	0,24
Σ	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1

Израчунавамо χ^2 = 0,043.

Број степени слободе је υ = (6 – 1)(4 – 1) = 15, па ако за ниво значајности узимамо α = 0,05 из таблице видимо да ћемо одбацити H_0 ако је χ^2 > 24,996. Међутим, израчунати број χ^2 = 0, 043 је знатно мањи. То значи да прихватамо нулту хипотезу. Дакле, координате *X* и *Y* су независне случајне варијабле, а то је управо оно што је у задатку задатку 8.3.8.5. и претпостављено.♦

Примјер 8.4.4. У Америци су 2010. били избори за сенатора у Флориди. Кандидати су били Мик (*Kendrick Meek*), Рубио (*Marco Rubio*) и Крист (*Charlie Crist*) . Испитивањем насумичних 3069 гласача требало је провјерити да ли је избор кандидата био независтан од образовања гласача. Сваки испитаник је требао да бира једну од 12 могућности, да је достигао један од четири нивоа образовања пута три кандидата. Добијени су резултати:

	Кандидати			
Образовање	Мик	Рубио	Крист	Укупно
Средња школа	140	338	153	631
Уписан колеџ	188	494	306	988
Завршен колеџ	183	510	316	1009
Факултетска диплома	76	178	187	441
Укупно	587	1520	962	3069

Помоћу калкулатора[45], уносећи 12 елемента ове табеле (a_{ij} – опажања) добијамо 12 елемената табеле очекивања (b_{ij}) и 12 сабирака облика $\frac{(a-b)^2}{b}$

$a_{ij} \wedge b_{ij} \to \chi_{ij}$

----

140 ∧ 120.689801238 → 3.08960469232

338 ∧ 312.518735745 → 2.07761888742

153 ∧ 197.791463017 → 10.1433860118

188 ∧ 188.972303682 → 0.00500271432149

494 ∧ 489.332029977 → 0.0445299771913

306 ∧ 309.695666341 → 0.0441011973597

183 ∧ 192.988921473 → 0.517016994697

510 ∧ 499.732811991 → 0.210943022122

316 ∧ 316.278266536 → 0.000244823225098

76 ∧ 84.348973607 → 0.826392513272

178 ∧ 218.416422287 → 7.47877459673

[45] http://www.elemenat.com/lat/tabkontigen.php

187 ∧ 138.234604106 → 17.2031008598

Збир свих 12 сабирака је χ^2 = 41.6407162903. Број степени слободе υ = 6, па за степен значајности α = 0.05 из хи-квадрат таблице налазимо $\chi^2_{0,05}(6)$ = 12.592. Према томе, $\chi^2 > \chi^2_{0,05}(6)$, што значи да је постојала зависност образовања гласача од његовог избора кандидата.♦

Задаци 8.4.5. У сљедећим задацима дефинисати и испитати нулту хипотезу.

1. Табела 2×2 показује учесталост прехлада код 279 француских скијаша

	Прехлада	Нема прехладе	Укупно
Плацебо	31	109	140
Третман	17	122	139
Укупно	48	231	297

Извори:

- Pauling, L. (1971). The signicance of the evidence about ascorbic acid and the common cold. *Proc. National Academy of Sciences (U.S.A.)*, 68, 2678{2681.
- Fienberg. S.E. (1980). *The Analysis of Cross-Classied Categorical Data. 2nd Edition* MIT Press: Cambridge, MA. Reprinted by Springer-Verlag, New York (2007).

2. Табела 3×3 показује тежине мужева и жена.

	Супруга	Висока	Средње в.	Ниска	Укупно
	Висок	18	28	14	60
Супруг	Средње в.	20	51	28	99
	Низак	12	25	9	46
Укупно		50	104	51	205

- Yule, G.U. (1900). On the association of attributes in statistics: with illustration from thematerial of the childhood society, &c. *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series* A, 194 257-319.

3. Избор клавира за концерт солиста 1973-74. главног Америчког оркестра.

	Избор клавира		Укупно
Оркестар	Steinway	Други	
Бостон	4	2	6
Чикаго	13	1	14
Кливленд	11	2	13
Минесота	2	2	4
Њујоршка филхармонија	9	2	11
Филаделфија	6	0	6
Укупно	45	9	54

- Fienberg. S.E. (1980). *The Analysis of Cross-Classied Categorical Data. 2nd Edition* MIT Press: Cambridge, MA. Reprinted by Springer-Verlag, New York (2007).

4. Отисци прстију десне руке класификовани према броју спирала и малих петљи.

Спирала	Мале петље 0	1	2	3	4	5	Укупно
0	78	144	204	211	179	45	861
1	106	153	126	80	32		497
2	130	92	55	15			292
3	125	38	7				170
4	104	26					130
5	50						50
Укупно	593	453	392	306	211	45	2000

- Waite, H. (1915). Association of fingerprints. *Biometrika*, 10, 421-478.

5. Класичан примјер табеле 2×2×2 за експеримент садње биљака.

Вријеме сађења		Рано		Касно	
Дужина резања:		Високо	Ниско	Високо	Ниско
Одговор	Жива	156	107	84	31
	Мртва	84	133	156	209
Укупно		240	240	240	240

- Bartlett, M.S. (1935). Contingency table interactions. *J. Roy. Statist. Soc. Suppl.*, 2, 248-252.
- Bishop, Y. M. M., Fienberg, S. E., and Holland, P. W. (1975). *Discrete Multivariate Analysis: Theory and Practice*. MIT Press, Cambridge, MA. Reprinted by Springer-Verlag, New York (2007).

6. Профил и фреквенција инфекција грипом за узорак од 263 особе у Мичигену, током зима 1977-78. до 1980-81.

j_1	j_2	j_3	j_4	Фреквенција
0	0	0	0	140
0	0	0	1	31
0	0	1	0	16
0	0	1	1	3
0	1	0	0	17
0	1	1	0	5
0	1	1	1	1
1	0	0	0	20
1	0	0	1	2
1	0	1	0	9
1	0	1	1	0
1	1	0	0	12
1	1	0	1	1
1	1	1	0	4
1	1	1	1	0

- Haber, M. (1986). Testing for pairwise independence. *Biometrics*, 42, 429-435.